

## §2.8 3次元実ベクトルの大きさ

任意の実数  $a$  に対して、 $a$  の絶対値  $|a|$  は

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

でした。このことと同様に、3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  の大きさ  $|\mathbf{a}|$  を定義します。3次元実ベクトル空間  $\mathbf{R}^3$  の任意のベクトル  $\mathbf{a}$  について、定理2.7.3より  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$  ですから、実数  $\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$  があります。

**定義** 3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  に対して、実数  $\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$  を  $\mathbf{a}$  の大きさといい、 $|\mathbf{a}|$  と書き表す：

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} .$$

**定理 2.8.1** 任意の3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  について

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} .$$

**証明**  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$  なので  $|\mathbf{a}|^2 = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  . (証明終り)

**定理 2.8.2** 任意の3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  について、

$$|\mathbf{a}| = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0} .$$

**証明** 定理2.7.4を用いる。

$$|\mathbf{a}| = 0 \iff \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = 0 \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0} .$$

(証明終り)

**定理 2.8.3** 任意の3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  及び任意の実数  $k$  について、

$$|k\mathbf{a}| = |k||\mathbf{a}| .$$

**証明**

$$|k\mathbf{a}| = \sqrt{(k\mathbf{a}) \cdot (k\mathbf{a})} = \sqrt{k^2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{k^2} \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = |k||\mathbf{a}| .$$

(証明終り)

つまり、任意の3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  及び任意の実数  $k$  について、ベクトル  $k\mathbf{a}$  の大きさはベクトル  $\mathbf{a}$  の大きさの  $|k|$  倍です。

**定理 2.8.4** 任意の実数  $a_1, a_2, a_3$  に対して、3次元実ベクトル  $(a_1, a_2, a_3)$  の大きさ  $|(a_1, a_2, a_3)|$  は

$$|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

**証明**

$$|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3)} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

(証明終り)

**例** 3次元実ベクトル  $(-4, -5, 6)$  の大きさは

$$|(-4, -5, 6)| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77} .$$

**終**

**問題 2.8.1** 以下の3次元実ベクトルの大きさを求めなさい。

$$(1) (-5, 6, -3) . \quad (2) (6 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{5}) .$$

3次元座標空間  $\mathbf{R}^3$  の点  $A = (a_1, a_2, a_3)$  と  $B = (b_1, b_2, b_3)$  とを結ぶ線分の長さ  $\overline{AB}$  は

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

でした。

**定理 2.8.5** 3次元座標空間  $\mathbf{R}^3$  の任意の点  $A, B$  について、

$$|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} .$$

**証明** 実数  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  に対して  $A = (a_1, a_2, a_3)$  ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  とおく。更に、点  $A$  の位置ベクトルを  $\mathbf{a}$  と、点  $B$  の位置ベクトルを  $\mathbf{b}$  とおく。

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  なので、

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) .$$

よって定理2.8.4より

$$|\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} .$$

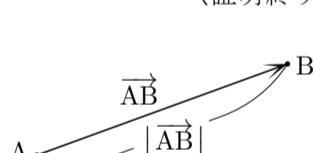
また、 $A = (a_1, a_2, a_3)$  ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$  より、

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} .$$

故に  $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$  .

(証明終り)

つまり、3次元座標空間  $\mathbf{R}^3$  の任意の点  $A, B$  について、例えば右図のように、ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  の大きさ  $|\overrightarrow{AB}|$  は線分  $AB$  の長さです。



ベクトルの内積に関する計算をしてみます。

**例題** 3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  について、 $|\mathbf{a}| = 3$  かつ  $|\mathbf{b}| = 2$  かつ  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -4$  とする。ベクトル  $5\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$  と  $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b}$  との内積を計算する。

$$\begin{aligned} (5\mathbf{a} + 8\mathbf{b}) \cdot (6\mathbf{a} - 7\mathbf{b}) &= 5\mathbf{a} \cdot (6\mathbf{a} - 7\mathbf{b}) + 8\mathbf{b} \cdot (6\mathbf{a} - 7\mathbf{b}) \\ &= 5\mathbf{a} \cdot 6\mathbf{a} - 5\mathbf{a} \cdot 7\mathbf{b} + 8\mathbf{b} \cdot 6\mathbf{a} - 8\mathbf{b} \cdot 7\mathbf{b} \\ &= 30\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 35\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 48\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 56\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= 30|\mathbf{a}|^2 + 13\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 56|\mathbf{b}|^2 \\ &= 30 \cdot 9 + 13 \cdot (-4) - 56 \cdot 4 = 270 - 52 - 224 \\ &= -6 . \end{aligned}$$

よって  $(5\mathbf{a} + 8\mathbf{b}) \cdot (6\mathbf{a} - 7\mathbf{b}) = -6$  .

**終**

**問題 2.8.2** 平面ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  について、 $|\mathbf{a}| = 2$  かつ  $|\mathbf{b}| = 3$  かつ  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4$  とします。ベクトル  $6\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$  と  $7\mathbf{a} + 8\mathbf{b}$  との内積を計算しなさい。

**例題** 平面ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  について、 $|\mathbf{a}| = 4$  かつ  $|\mathbf{b}| = 5$  かつ  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 18$  とする。ベクトル  $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$  の大きさ  $|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$  を求める。

$$\begin{aligned} |3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|^2 &= (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = 9\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 6\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + 4\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= 9|\mathbf{a}|^2 - 12\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 4|\mathbf{b}|^2 = 9 \cdot 16 - 12 \cdot 18 + 4 \cdot 25 \\ &= 28 . \end{aligned}$$

よって  $|3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| = \sqrt{28}$  .

**終**

**問題 2.8.3** 3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  について、 $|\mathbf{a}| = 5$  かつ  $|\mathbf{b}| = 6$  かつ  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -28$  とします。ベクトル  $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$  の大きさ  $|2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}|$  を求めなさい。

**定義** 3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  が単位ベクトルであるとは  $|\mathbf{a}| = 1$  となることである。

**例題** 次のような実数  $x$  を求める：3次元実ベクトル  $(x, \frac{4}{7}, \frac{5}{7})$  が単位ベクトルである。

$$\left| \left( x, \frac{4}{7}, \frac{5}{7} \right) \right| = 1 \text{ なので、 } \sqrt{x^2 + \left( \frac{4}{7} \right)^2 + \left( \frac{5}{7} \right)^2} = 1 , \quad x^2 + \frac{16}{49} + \frac{25}{49} = 1 , \quad x^2 = \frac{8}{49} ,$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{8}{49}} = \pm \frac{\sqrt{8}}{7} .$$

**終**

**問題 2.8.4** 次のような実数  $y$  を求めなさい：3次元実ベクトル  $(\frac{3}{8}, y, \frac{5}{8})$  が単位ベクトルである。

ベクトルの内積について更にもう一つ定理を述べます。

**定理 2.8.6** 任意の3次元実ベクトル  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  について、

$$-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .$$

**証明**  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  のとき、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  ,  $|\mathbf{a}| = 0$  なので  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = 0$  , よって  $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$  .

$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  とする。  $|\mathbf{a}| \neq 0$  .

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} - |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \right|^2 &= \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} - |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} - |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \right) \\ &= \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - 2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{a}|^2 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 + |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \\ &= (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 , \end{aligned}$$

$\left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} - |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \right|^2 \geq 0$  なので  $(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \geq 0$  , よって

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)^2 .$$

$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geq 0$  なので  $-|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$  .

(証明終り)