

§0.0 区間

直感的にいうと、**区間** (interval) とは隙間がない実数の集合のことです。正確にいうと、実数の集合 I が区間であるとは I が次の条件を満たすことです：任意の実数 x, y, z について、 x と y とが I に属しかつ $x < z < y$ ならば、 z も I に属す。

実数 a と b とに対して、

$a \leq x \leq b$ となる実数 x の全体 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ を $[a, b]$ と、

$a < x < b$ となる実数 x の全体 $\{x \mid a < x < b\}$ を (a, b) と

表記します：

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

区間 $[a, b]$ には a も b も属しますが、区間 (a, b) には a も b も属しません。



区間 $[a, b]$



区間 (a, b)

区間を表す記法 (a, b) は座標平面の点の座標を表す記法 (x, y) と同じですが、意味は全く異なります。紛らわしいので注意して下さい。

次のような区間もあります：実数 a, b について、

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

区間 I について、 I に属す実数を I の点ということがあります。

解析学では、議論の便宜のために、2つの仮想的な数 $+\infty$ と $-\infty$ とを用います。 $+\infty$ は**正の無限大**とよばれ、 $-\infty$ は**負の無限大**とよばれます。正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記されます。 ∞ と $-\infty$ とは実数ではありません。 ∞ 及び $-\infty$ に関する四則演算は全く定義されません。大小関係について、正の無限大 ∞ はどんな実数よりも大きく、負の無限大 $-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束します；つまり、

$$\text{任意の実数 } x \text{ について } -\infty < x < \infty.$$

実数 a に対して、

a 以下の実数の全体 $\{x \mid x \leq a\}$ 、 a より大きい実数の全体 $\{x \mid x > a\}$

等も区間です。このような区間を、 $\infty, -\infty$ ¹⁾を用いて以下のように表記します：実数 a に対して、

$$(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \leq a\} = \{x \mid x \leq a\},$$

$$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x < \infty\} = \{x \mid x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid -\infty < x < a\} = \{x \mid x < a\},$$

$$(a, \infty) = \{x \mid a < x < \infty\} = \{x \mid x > a\}.$$

例えば、区間 $[0, \infty)$ は 0 以上の実数全体であり、区間 $(0, \infty)$ は正の実数全体です。

更に、実数全体も1つの区間です。実数全体を \mathbf{R} と書き表します。

¹⁾ 区間とは実数の集合です。 ∞ と $-\infty$ とは実数ではないので、区間に属すことはありません。