§0.0　区間

直感的にいうと，**区間** (interval) とは隙間がない実数の集合のことです． 正確にいうと，実数の集合 I が区間であるとは I が次の条件を満たすことです：任意の実数 x, y, z について，x と y とが I に属しかつ $x < z < y$ ならば，z も I に属す．

実数 a と b とに対して，

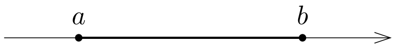
$a \leq x \leq b$ となる実数 x の全体 $\{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}$ を $[a,b]$ と，

$a < x < b$ となる実数 x の全体 $\{\, x \mid a < x < b \,\}$ を (a,b) と

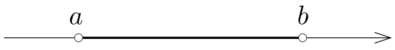
表記します：

$$[a,b] = \{\, x \mid a \leq x \leq b \,\}\ , \qquad (a,b) = \{\, x \mid a < x < b \,\}\ .$$

区間 $[a,b]$ には a も b も属しますが，区間 (a,b) には a も b も属しません．



区間 $[a,b]$



区間 (a,b)

区間を表す記法 (a,b) は座標平面の点の座標を表す記法 (x,y) と同じですが，意味は全く異なります． 紛らわしいので注意して下さい．

次のような区間もあります：実数 a, b について，

$$(a,b] = \{\, x \mid a < x \leq b \,\}\ , \qquad [a,b) = \{\, x \mid a \leq x < b \,\}\ .$$

区間 I について，I に属す実数を I の点ということがあります．

解析学では，議論の便宜のために，2つの仮想的な数 $+\infty$ と $-\infty$ とを用います． $+\infty$ は**正の無限大**とよばれ，$-\infty$ は**負の無限大**とよばれます． 正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記されます． ∞ と $-\infty$ とは実数ではありません． ∞ 及び $-\infty$ に関する四則演算は全く定義されません． 大小関係について，正の無限大 ∞ はどんな実数よりも大きく，負の無限大 $-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束します；つまり，

$$\text{任意の実数 } x \text{ について} \quad -\infty < x < \infty\ .$$

実数 a に対して，

a 以下の実数の全体 $\{\, x \mid x \leq a \,\}$，　a より大きい実数の全体 $\{\, x \mid x > a \,\}$

等も区間です． このような区間を，$\infty, -\infty$ [1] を用いて以下のように表記します：実数 a に対して，

$$(-\infty,a] = \{\, x \mid -\infty < x \leq a \,\} = \{\, x \mid x \leq a \,\}\ ,$$
$$[a,\infty) = \{\, x \mid a \leq x < \infty \,\} = \{\, x \mid x \geq a \,\}\ ,$$
$$(-\infty,a) = \{\, x \mid -\infty < x < a \,\} = \{\, x \mid x < a \,\}\ ,$$
$$(a,\infty) = \{\, x \mid a < x < \infty \,\} = \{\, x \mid x > a \,\}\ .$$

例えば，区間 $[0,\infty)$ は0以上の実数全体であり，区間 $(0,\infty)$ は正の実数全体です．

更に，実数全体も1つの区間です． 実数全体を $\mathbf{R}$ と書き表します．

[1] 区間とは実数の集合です． ∞ と $-\infty$ とは実数ではないので，区間に属すことはありません．