§ 0.1　関数の概念

ある範囲の数の各々に対する数を唯一つ定める対応を**関数**といい，元の数の範囲を**定義域**といいます．関数はより一般的に次のように定義されます．

定義　集合 S を定義域とする関数とは，集合 S の要素の各々に対するものを唯一つ定める対応のことである．

関数はある種の対応であり，抽象的な概念ですが，数学では関数も 1 つの“もの”として扱います．関数をよく f とか g とか φ とか ψ とかの文字で表します．関数 f は定義域の各要素 a に対して唯一つのものを定めます；a に対して f が定めるものを a に対する f の**値**といい，$f(a)$ と書き表します．関数 f を定めることは，f の定義域を定めてその定義域の各要素 x に対する f の値 $f(x)$ を定めることです．

関数 f について，f の定義域の要素 x に対する f の値 $f(x)$ の範囲を f の**値域** (range) といいます．

定義　関数 f の値域とは，f の定義域の各要素 x に対する f の値 $f(x)$ の全体である．

関数 f そのものと，f の値 $f(x)$ とは別のものです．しかし，しばしば，変数 x が現れる式 $f(x)$ に対して，x に対して $f(x)$ を定める関数を“関数 $f(x)$”といいます．

関数 f の定義域の要素を表す変数を f の**独立変数**といい，独立変数 x の値に対する f の値 $f(x)$ を表す変数 y を f の**従属変数**といいます．つまり独立変数 x に対する f の従属変数は $y = f(x)$ となる変数 y のことです．独立変数 x に対する関数 f の従属変数を y とおくとき，“関数 $y = f(x)$”といいます．

特殊な関数として，関数の値が常に同じである関数を定数関数 (constant function) といいます．つまり，関数 f が定数関数であるとは，f の定義域の任意の要素 u と v とに対して $f(u) = f(v)$ となることです．

関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の 1 次式で表されるとき，f を 1 次関数といいます．関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の 2 次式で表されるとき，f を 2 次関数といいます．一般に，自然数 n に対して，関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の n 次式で表されるとき，f を n 次関数といいます．関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の整式で表されるとき，f を**有理整関数**といいます．つまり，定数関数，1 次関数，2 次関数，$\cdots$ などを併せて有理整関数といいます．更に，関数 f の値 $f(x)$ が変数 x の有理式で表されるとき，f を**有理関数**といいます．

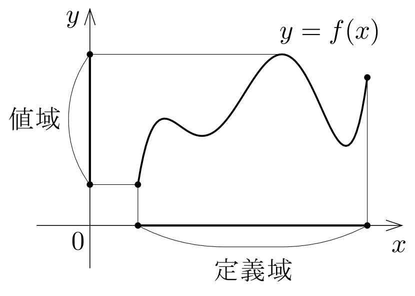
関数 f の**グラフ**とは，x が定義域の要素で $f(x) = y$ である実数 x と y との順序対 (x, y) 全体

$$\{\, (x, y) \mid x \text{ は定義域の要素で } f(x) = y \,\}$$

のことです．よって，任意の実数 x と y とについて，

$$\text{順序対 } (x, y) \text{ が } f \text{ のグラフに属す} \iff x \text{ は定義域の要素で } f(x) = y \ .$$

関数 f の独立変数を x とおき従属変数を y とおきます：$y = f(x)$ ．独立変数 x は f の定義域の要素を表す変数ですから，f の定義域が x の値の範囲です．また，f の値域は $f(x)$ の値つまり従属変数 y の値の範囲です．ですから，xy 座標平面において，



関数 f の定義域は $y = f(x)$ のグラフに属す点の x 座標の範囲で，

関数 f の値域は $y = f(x)$ のグラフに属す点の y 座標の範囲です．

関数の f の**最大値** (maximum value) とは f の値域のなかで最も大きい実数のことで，関数 f の**最小値** (minimum value) とは f の値域のなかで最も小さい実数のことです．正確に述べると次のようになります．

定義　関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

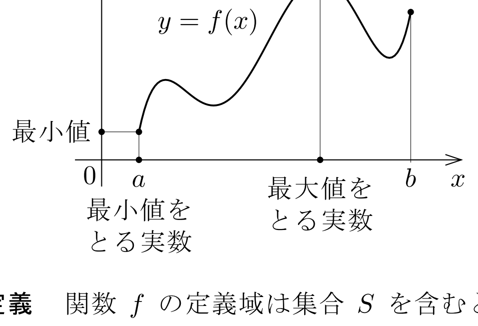
$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \ ;$$

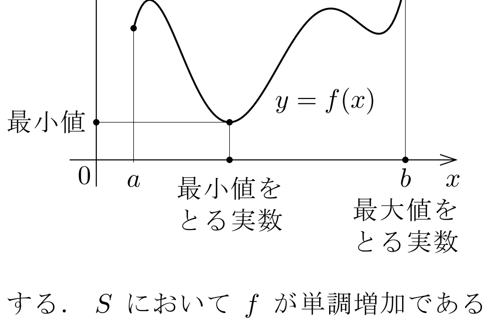
このとき f の値 $f(p)$ を f の最大値という．また，f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) \ ;$$

このとき f の値 $f(p)$ を f の最小値という．

実数 a と b とについて $a < b$ とします．区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになります．





定義　関数 f の定義域は集合 S を含むとする．S において f が単調増加であるとは，

$$S \text{ の任意の実数 } u \text{ と } v \text{ とについて} \quad u < v \text{ ならば } f(u) < f(v)$$

となることである．f が定義域全体で単調増加であるとき，単に f は単調増加であるという．S において f が単調減少であるとは，

$$S \text{ の任意の要素 } u \text{ と } v \text{ とについて} \quad u < v \text{ ならば } f(u) > f(v)$$

となることである．f が定義域全体で単調減少であるとき，単に f は単調減少であるという．

グラフで考えると例えば次のようになります．