§0.3　逆関数

関数 f の値域が関数 g の定義域であり，f の定義域の各要素 x について $g\bigl(f(x)\bigr)=x$ となるとき，g は f の**逆関数** (inverse function) であるといいます． 関数 f の逆関数は $f(x)$ を x に戻す働きをする関数です．

定義　関数 f の逆関数とは次の2条件を満たす関数 g のことである：

(1) g の定義域は f の値域と同じである；

(2) f の定義域の任意の要素 x について $g\bigl(f(x)\bigr)=x$ ．

定理 0.3.1　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，

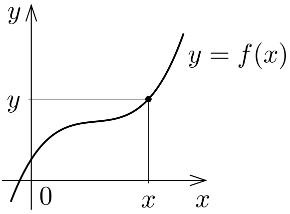
f の定義域の任意の要素 x について $g\bigl(f(x)\bigr)=x$ ，

g の定義域の任意の要素 y について $f\bigl(g(y)\bigr)=y$ ．

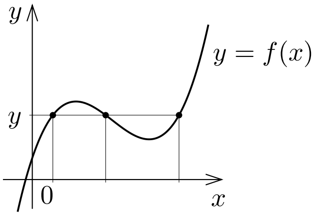
定理 0.3.2　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，f の定義域の任意の要素 x 及び g の定義域の任意の要素 y について

$$f(x)=y \iff g(y)=x \ .$$

定理 0.3.3　関数 f の値域の各要素 y に対して $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，f の値域の各要素 y に $f(x)=y$ となる f の定義域の要素 x を対応させる関数は f の逆関数である．



$f(x)=y$ となる x の値が唯一つだけあるので，関数 f の逆関数がある．



関数 f の逆関数はない． $f(x)=y$ となる x の値が2つ以上ある．

定理 0.3.4　関数 f に対して，f の逆関数はあるとしても唯一つだけである．

関数 f の逆関数があるとき，f の逆関数を f^{-1} と書き表します．

定理 0.3.5　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，f^{-1} の定義域は f の値域であり，f^{-1} の値域は f の定義域である．

定理 0.3.6　関数 g が関数 f の逆関数であるとき，f は g の逆関数である．

逆関数のグラフについて次の定理が成り立ちます．

定理 0.3.6　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，xy 座標平面において，f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である．