

### §0.3 逆関数

関数  $f$  の値域が関数  $g$  の定義域であり、 $f$  の定義域の各要素  $x$  について  $g(f(x)) = x$  となるとき、 $g$  は  $f$  の逆関数 (inverse function) であるといいます。関数  $f$  の逆関数は  $f(x)$  を  $x$  に戻す働きをする関数です。

**定義** 関数  $f$  の逆関数とは次の2条件を満たす関数  $g$  のことである：

- (1)  $g$  の定義域は  $f$  の値域と同じである；
- (2)  $f$  の定義域の任意の要素  $x$  について  $g(f(x)) = x$  .

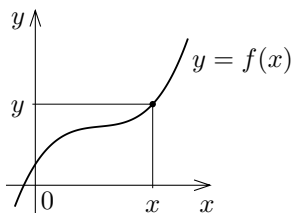
**定理 0.3.1** 関数  $g$  が関数  $f$  の逆関数であるとき、

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } x \text{ について } g(f(x)) = x ,$$
$$g \text{ の定義域の任意の要素 } y \text{ について } f(g(y)) = y .$$

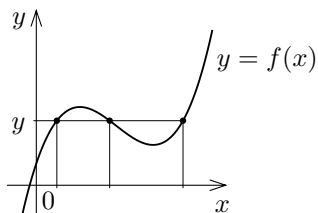
**定理 0.3.2** 関数  $g$  が関数  $f$  の逆関数であるとき、 $f$  の定義域の任意の要素  $x$  及び  $g$  の定義域の任意の要素  $y$  について

$$f(x) = y \iff g(y) = x .$$

**定理 0.3.3** 関数  $f$  の値域の各要素  $y$  に対して  $f(x) = y$  となる  $f$  の定義域の要素  $x$  が唯一つあるとき、 $f$  の値域の各要素  $y$  に  $f(x) = y$  となる  $f$  の定義域の要素  $x$  を対応させる関数は  $f$  の逆関数である。



$f(x) = y$  となる  $x$  の値が唯一つだけ  
あるので、関数  $f$  の逆関数がある。



関数  $f$  の逆関数はない。 $f(x) = y$   
となる  $x$  の値が2つ以上ある。

**定理 0.3.4** 関数  $f$  に対して、 $f$  の逆関数はあるとしても唯一つだけである。

関数  $f$  の逆関数があるとき、 $f$  の逆関数を  $f^{-1}$  と書き表します。

**定理 0.3.5** 関数  $f$  の逆関数  $f^{-1}$  があるとき、 $f^{-1}$  の定義域は  $f$  の値域であり、 $f^{-1}$  の値域は  $f$  の定義域である。

**定理 0.3.6** 関数  $g$  が関数  $f$  の逆関数であるとき、 $f$  は  $g$  の逆関数である。

逆関数のグラフについて次の定理が成り立ちます。

**定理 0.3.6** 関数  $f$  の逆関数  $f^{-1}$  があるとき、 $xy$  座標平面において、 $f^{-1}$  のグラフは  $f$  のグラフと直線  $y = x$  に関して対称である。

