

§0.4 2次関数

変数 x に対する関数 f の値 $f(x)$ が x の2次式で表されるような関数 f を **2次関数**とといいます。つまり、関数 f が2次関数であるとは、変数 x について $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数で $a \neq 0$) となることです。

x の2次式は総て次の形に直せます：

$$a(x+p)^2 + q \quad (a, p, q \text{ は定数で } a \neq 0).$$

2次式をこの形に変形することを**平方完成**とといいます。2次関数を平方完成された2次式で表すことは重要です。

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とします。変数 x の2次式 $ax^2 + bx + c$ の平方完成は次のようになります：

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left\{x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば、任意の実数 x について、 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ より $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ であり、かつ $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0$ なので、

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq -\frac{b^2 - 4ac}{4a} > 0.$$

$a < 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば、任意の実数 x について、 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ より $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ であり、かつ $-\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$ なので、

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \leq -\frac{b^2 - 4ac}{4a} < 0.$$

こうして次の定理が導かれます。

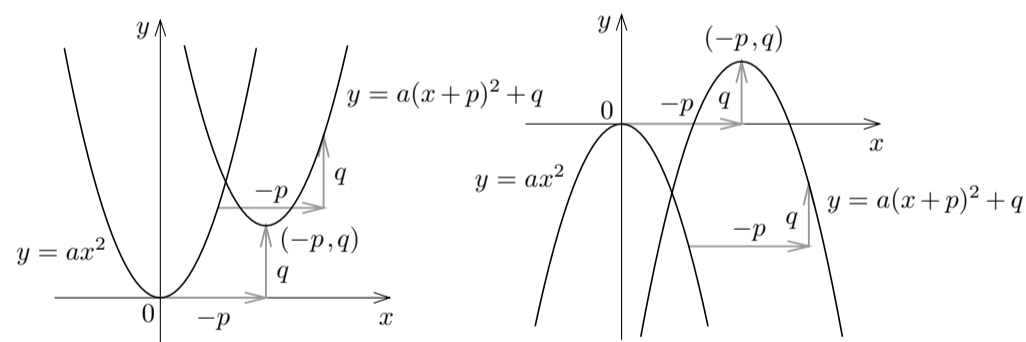
定理 0.4.1 2次関数 $ax^2 + bx + c$ (定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$) について次のことが成り立つ：

$a > 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば、任意の実数 x について $ax^2 + bx + c > 0$ ；

$a < 0$ かつ $b^2 - 4ac < 0$ ならば、任意の実数 x について $ax^2 + bx + c < 0$ 。

平方完成された2次式で表される2次関数のグラフについて次の定理が導かれます。

定理 0.4.2 xy 座標平面において、2次関数 $y = a(x+p)^2 + q$ (a, p, q は定数で $a \neq 0$) のグラフは、関数 $y = ax^2$ のグラフを x 軸の向きに $-p$ だけ、 y 軸の向きに q だけ平行移動させた図形である；従って、2次関数 $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフは、関数 $y = ax^2$ のグラフと合同で向きも同じ放物線であり、頂点は $(-p, q)$ である。



$a > 0$ のときの $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフ $a < 0$ のときの $y = a(x+p)^2 + q$ のグラフ

定数 a, b, c は実数で $a \neq 0$ とします。未知数 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解の個数と、 xy 座標平面における変数 x の2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との共有点の個数とは一致します。

	$b^2 - 4ac > 0$ のとき	$b^2 - 4ac = 0$ のとき	$b^2 - 4ac < 0$ のとき
$ax^2 + bx + c = 0$ の解	異なる2つの実数解 α, β ($\alpha < \beta$)	1つの実数解 (重解) α	異なる2つの虚数解
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸 ($a > 0$ のとき)			
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸 ($a < 0$ のとき)			
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との共有点	2個	1個	無し