§0.5 指数の拡張と冪関数

冪における指数をまず整数の範囲にまで広げます.

定義　0 以外の数 a 及び正の自然数 n に対して，a の $-n$ 乗 a^n を $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定義する.

整数指数の指数法則が成り立ちます.

定理 0.5.1（整数指数の指数法則）　0 以外の任意の数 a, b 及び任意の整数 m, n について，

$$a^m a^n = a^{m+n}\ , \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\ , \qquad (a^m)^n = a^{mn}\ ;$$

$$(ab)^n = a^n b^n\ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ .$$

更に，冪における指数を有理数の範囲にまで広げます.

正の奇数 n に対して，実数全体を定義域とする冪関数 x^n の逆関数があります. 正の偶数 n に対して，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^n の逆関数があります. 正の自然数 n に対して，冪関数 x^n の逆関数（の値）を $\sqrt[n]{x}$ と書き表します. 正の自然数 n が奇数のとき，任意の実数 x に対して $\sqrt[n]{x}$ の値があります. 正の自然数 n が偶数のとき，0 以上の実数 x に対してだけ $\sqrt[n]{x}$ の値があります.

定義　実数 a について $a \geq 0$ とする. 整数 m と正の整数 n に対して，a の $\dfrac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ と定義する；但し，$m < 0$ のときは $a > 0$ とする.

定理 0.5.2　任意の正の実数 a 及び任意の整数 m と任意の正の整数 n とについて，

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}\ .$$

更に，任意の実数 p 及び任意の正の実数 a に対して a の p 乗 a^p の値が定まります. そして指数法則も同じ形の等式が成り立ちます.

定理 0.5.3（実数指数の指数法則）　任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について，

$$a^p a^q = a^{p+q}\ , \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}\ , \qquad (a^p)^q = a^{pq}\ ;$$

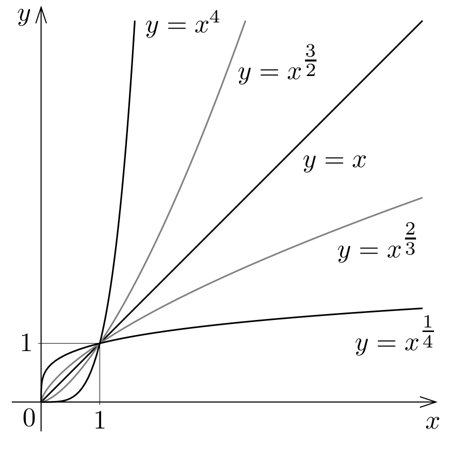
$$(ab)^p = a^p b^p\ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}\ .$$

指数法則から次のことが成り立ちます：正の実数 a, b 及び任意の実数 p について，

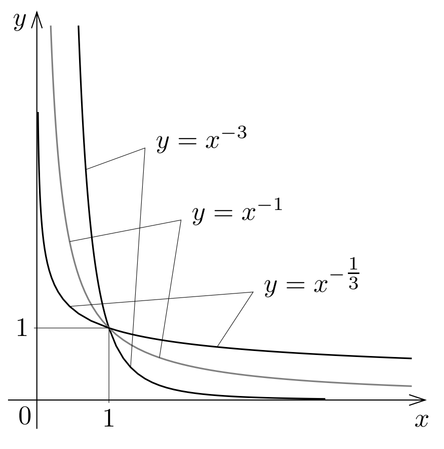
$$a^{-p} = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p}\ .$$

定数 p が実数のとき，正の実数 x に x の冪 x^p を対応させる関数が定義できます. この関数 x^p を，p を指数とする**冪関数**といいます.

定数 p は実数で $p \neq 0$ のとき，冪関数 x^p（$p > 0$ のときは $x \geq 0$，$p < 0$ のときは $x > 0$）のグラフは次のようになります.



$p > 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ



$p < 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます.

定理 0.5.4　定数 p は実数で $p \neq 0$ とする.

$p > 0$ のとき，区間 $[0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調増加である.

$p < 0$ のとき，区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調減少である.

冪関数の逆関数について次の定理が成り立ちます.

定理 0.5.5　定数 p は実数で $p \neq 0$ とする. 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は，$(0,\infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である.