

§0.5 指数の拡張と冪関数

冪における指数をまず整数の範囲にまで広げます。

定義 0 以外の数 a 及び正の自然数 n に対して、 a の $-n$ 乗 a^{-n} を $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ と定義する。

整数指数の指数法則が成り立ちます。

定理 0.5.1 (整数指数の指数法則) 0 以外の任意の数 a, b 及び任意の整数 m, n について、

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

更に、冪における指数を有理数の範囲にまで広げます。

正の奇数 n に対して、実数全体を定義域とする冪関数 x^n の逆関数があります。
 正の偶数 n に対して、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^n の逆関数があります。
 正の自然数 n に対して、冪関数 x^n の逆関数 (の値) を $\sqrt[n]{x}$ と書き表します。正の自然数 n が奇数のとき、任意の実数 x に対して $\sqrt[n]{x}$ の値があります。正の自然数 n が偶数のとき、0 以上の実数 x に対してだけ $\sqrt[n]{x}$ の値があります。

定義 実数 a について $a \geq 0$ とする。整数 m と正の整数 n に対して、 a の $\frac{m}{n}$ 乗 $a^{\frac{m}{n}}$ を $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ と定義する；但し、 $m < 0$ のときは $a > 0$ とする。

定理 0.5.2 任意の正の実数 a 及び任意の整数 m と任意の正の整数 n について、

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^m.$$

更に、任意の実数 p 及び任意の正の実数 a に対して a の p 乗 a^p の値が定まります。そして指数法則も同じ形の等式が成り立ちます。

定理 0.5.3 (実数指数の指数法則) 任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について、

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq};$$

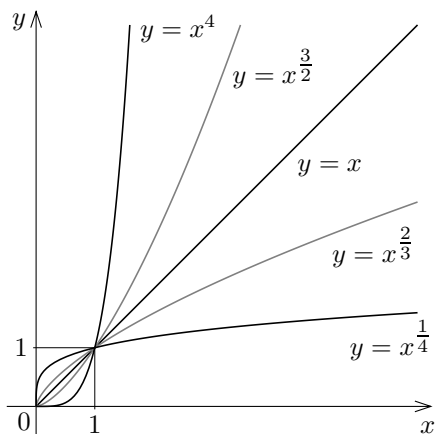
$$(ab)^p = a^p b^p, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}.$$

指数法則から次のことが成り立ちます：正の実数 a, b 及び任意の実数 p について、

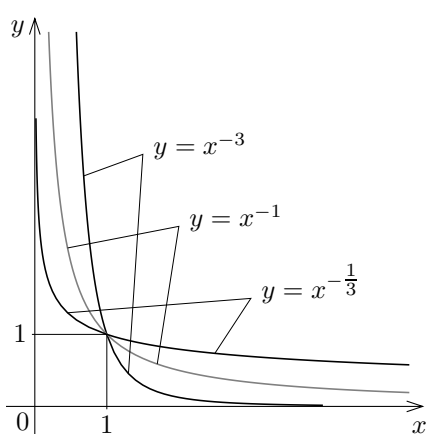
$$a^{-p} = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^p} = \frac{1}{a^p}.$$

定数 p が実数のとき、正の実数 x に x の冪 x^p を対応させる関数が定義できます。この関数 x^p を、 p を指数とする**冪関数**といいます。

定数 p は実数で $p \neq 0$ のとき、冪関数 x^p ($p > 0$ のときは $x \geq 0$, $p < 0$ のときは $x > 0$) のグラフは次のようになります。



$p > 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ



$p < 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立ちます。

定理 0.5.4 定数 p は実数で $p \neq 0$ とする。

$p > 0$ のとき、区間 $[0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調増加である。

$p < 0$ のとき、区間 $(0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^p は単調減少である。

冪関数の逆関数について次の定理が成り立ちます。

定理 0.5.5 定数 p は実数で $p \neq 0$ とする。区間 $(0, \infty)$ を定義域とする冪関数 x^p の逆関数は、 $(0, \infty)$ を定義域とする冪関数 $x^{\frac{1}{p}}$ である。