

§0.7 対数関数

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします. 実数全体を定義域とする指数関数 a^x の値域は区間 $(0, \infty)$ です. $y > 0$ となる任意の実数 y に対して, $a^x = y$ となる実数が唯一つあります. 従って, 定理 0.3.3 より, 指数関数 a^x の逆関数があります. a を底とする指数関数 a^x の逆関数を, a を底とする**対数関数**といい, (その値を) $\log_a x$ と書き表します. 対数関数は区間 $(0, \infty)$ を定義域にすることができます. 以後, 対数関数を扱うとき, 特に断りがない限り, 定義域は区間 $(0, \infty)$ である とします.

実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とします. a を底とする対数関数の実数 r に対する値 $\log_a r$ を, a を底とする r の**対数** (logarithm) といいます. また, 対数を表す式 $\log_a X$ において, \log_a の中身 X を**真数**といいます. 対数関数はの定義域は区間 $(0, \infty)$ (の一部) ですから,

対数の真数は正の数でなければならない

ことに注意して下さい.

定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします. a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数を a^x の逆関数ですから, 定理 0.3.1 より次の定理が成り立ちます.

定理 0.7.1 実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする.

$$\begin{aligned} & \text{任意の実数 } p \text{ について } \log_a(a^p) = p, \\ & r > 0 \text{ である任意の実数 } r \text{ について } a^{\log_a r} = r. \end{aligned}$$

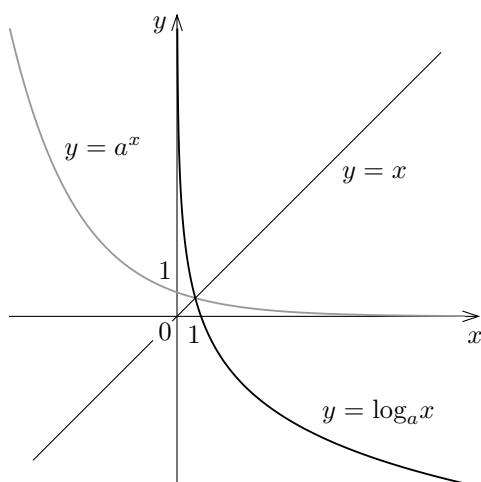
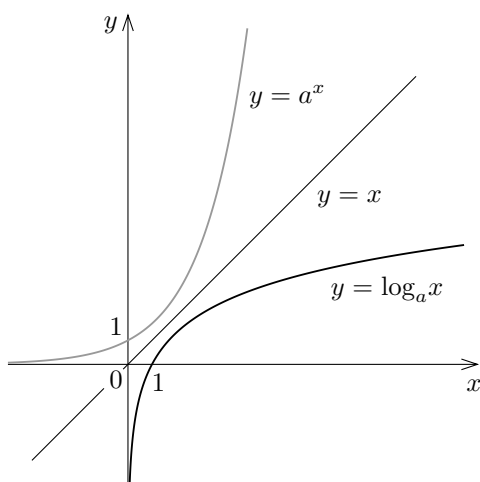
a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします. $1 = a^0$ なので, 定理 0.7.1 より,

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0.$$

$a = a^1$ なので,

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1.$$

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とします. a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数ですから, 定理 0.3.2 より, xy 座標平面において, $y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称です. 対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは限りなく y 軸に近づいていきますが, y 軸に接することはありません. つまり, y 軸は $y = \log_a x$ のグラフの漸近線です.



$a > 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ $0 < a < 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ
グラフから分かるように次の定理が成り立ちます.

定理 0.7.2 定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 対数関数 $\log_a x$ は, $a > 1$ のとき単調増加であり, $0 < a < 1$ のとき単調減少である.

更に, 対数関数について以下の定理が成り立ちます.

定理 0.7.3 a は正の実数で $a \neq 1$ とする. $r, s > 0$ である任意の実数 r, s 及び任意の実数 p について,

$$\log_a rs = \log_a r + \log_a s, \quad \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s, \quad \log_a r^p = p \log_a r.$$

定理 0.7.4 (対数の底の変換公式) 実数 a, b, c について, $a, b, c > 0$, $a, c \neq 1$ のとき,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

定理 0.7.5 実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. $r > 0$, $s > 0$ である任意の実数 r と s について,

$$r = s \iff \log_a r = \log_a s.$$

定理 0.7.6 実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする.

- (1) $a > 1$ のとき, 任意の実数 r と s について,
- $$\begin{aligned} 0 < r < s & \iff \log_a r < \log_a s, \\ 0 < r \leq s & \iff \log_a r \leq \log_a s; \end{aligned}$$
- (2) $0 < a < 1$ のとき, 任意の実数 r と s について,
- $$\begin{aligned} 0 < r < s & \iff \log_a r > \log_a s, \\ 0 < r \leq s & \iff \log_a r \geq \log_a s. \end{aligned}$$

底が 10 の対数を常用対数といいます. 工学では, 正の実数 r の常用対数 $\log_{10} r$ を $\log r$ と略記することがあります.