

§0.8 三角関数

半径との弧の長さが等しい扇形の中心角の大きさを 1rad と定義します。弧度法の単位 “rad” と度数法の単位 “°” との間には次の関係が成り立ちます：

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

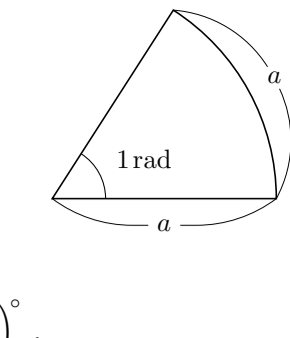
この等式より以下の等式が導かれます：任意の実数 t, u について、

$$t \text{ rad} = \frac{t}{\pi} \pi \text{ rad} = \frac{t}{\pi} 180^\circ = \left(\frac{180t}{\pi} \right)^\circ,$$

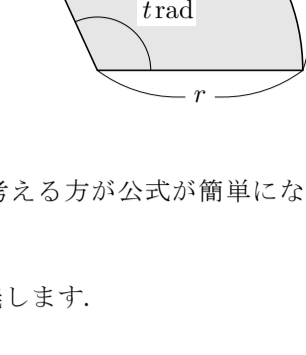
$$u^\circ = \left(\frac{u}{180} 180 \right)^\circ = \frac{u}{180} 180^\circ = \frac{u}{180} \pi \text{ rad} = \frac{\pi u}{180} \text{ rad}.$$

次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.1 正の実数 l, r, t について、扇形の半径が r で中心角の弧度法による大きさが $t \text{ rad}$ で弧の長さが l であるとき $l = rt$.



定理 0.8.2 正の実数 r, t について、半径が r で中心角の弧度法による大きさが $t \text{ rad}$ である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2} r^2 t$ である。



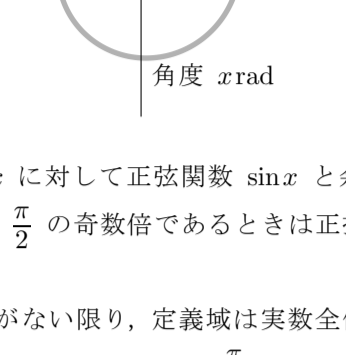
扇形の中心角の大きさを度数法で考えるより弧度法で考える方が公式が簡単になります。

正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$, 正接関数 $\tan x$ を定義します。

定義 任意の実数 x に対して、正弦関数の値 $\sin x$, 余弦関数の値 $\cos x$, 正接関数の値 $\tan x$ を次のように定義する： XY 座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する一般角 $x \text{ rad}$ の動径に属する点 $P = (a, b)$ (但し $P \neq O$) について $\overline{OP} = r$ とおくと、

$$\sin x = \frac{b}{r}, \quad \cos x = \frac{a}{r},$$

$$a \neq 0 \text{ のとき } \tan x = \frac{b}{a}.$$



これらの関数を三角関数といいます。任意の実数 x に対して正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ との値が定義されます。ところが、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍であるときは正接関数 $\tan x$ の値は存在しません。

以後、正弦関数または余弦関数を扱うとき、特に断りがない限り、定義域は実数全体とします。また、正接関数を扱うとき、特に断りがない限り、定義域は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数全体とします。

実数 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ の各々に対する正弦関数・余弦関数・正接関数の値は覚えておいて下さい：

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0, & \cos 0 &= 1, & \tan 0 &= 0; \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \tan \frac{\pi}{4} &= 1; \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}, & \tan \frac{\pi}{3} &= \sqrt{3}. \\ \sin \frac{\pi}{2} &= 1, & \cos \frac{\pi}{2} &= 0, & \tan \frac{\pi}{2} &: \text{値無し}. \end{aligned}$$

更に正割関数, 余接関数, 余割関数, の3個の三角関数を定義します。 $\cos x \neq 0$ である実数 x に対して、正割関数の値 $\sec x$ を以下のように定義します：

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

また、 $\sin x \neq 0$ である実数 x に対して、余接関数の値 $\cot x$ 及び余割関数の値 $\operatorname{cosec} x$ を以下のように定義します：

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

三角関数の定義よりの定理が導かれます。

定理 0.8.3 任意の実数 x について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

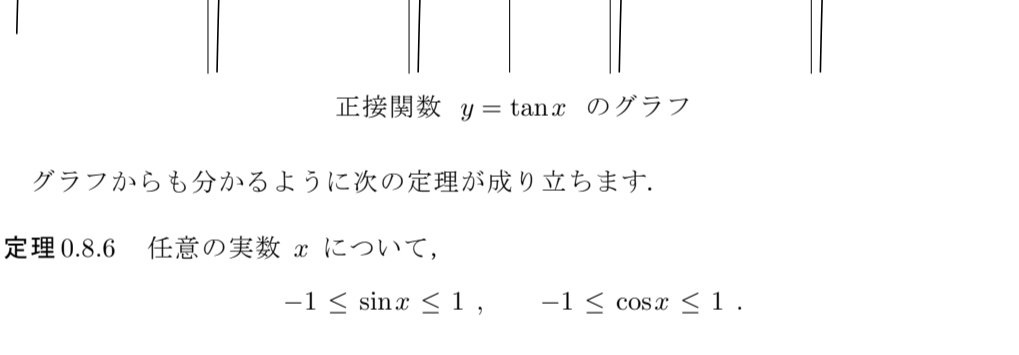
定理 0.8.4 任意の実数 x について

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

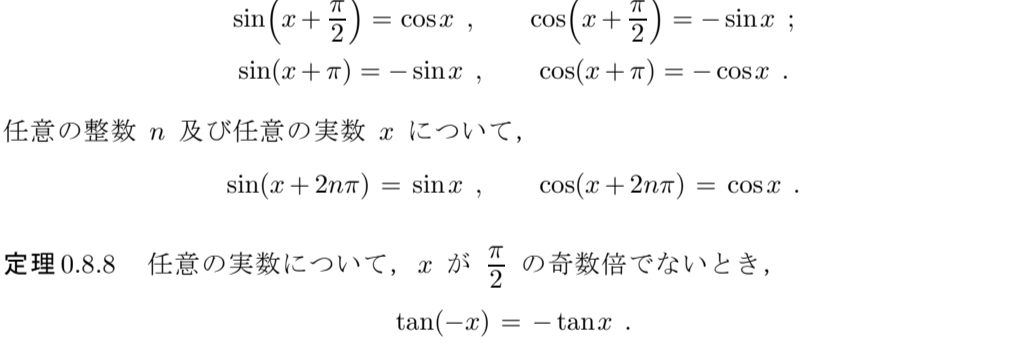
定理 0.8.5 任意の実数 x について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

座標平面において、正弦関数 $\sin x$ のグラフと余弦関数 $\cos x$ のグラフとは同じ形の曲線になります。この形の曲線を正弦曲線といいます。

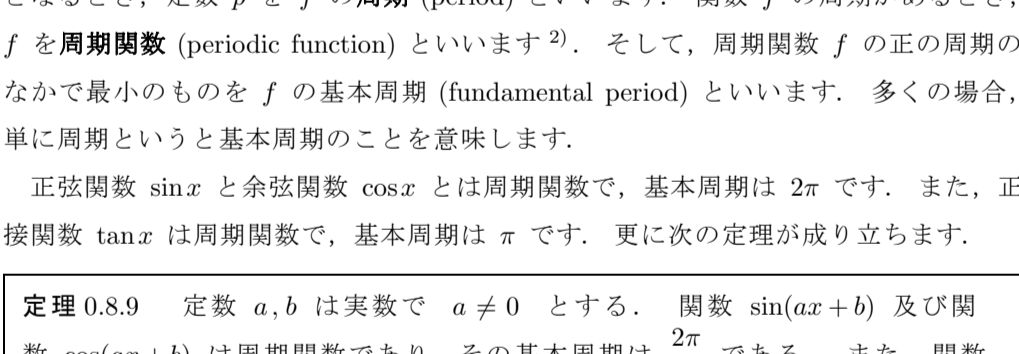


正弦関数 $y = \sin x$ のグラフ



余弦関数 $y = \cos x$ のグラフ

正接関数 $y = \tan x$ のグラフは次のようになります。



正接関数 $y = \tan x$ のグラフ

グラフからも分かるように次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.6 任意の実数 x について、

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

三角関数について以下の還元公式が成り立ちます。

定理 0.8.7 任意の実数 x について、

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x; \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x; \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, & \cos(x + \pi) &= -\cos x. \end{aligned}$$

任意の整数 n 及び任意の実数 x について、

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x.$$

定理 0.8.8 任意の実数について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$\tan(-x) = -\tan x.$$

任意の整数 n 及び任意の実数 x について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$\tan(x + n\pi) = \tan x.$$

関数 f 及び 0 でない定数 p について、

$$f \text{ の定義域の任意の点 } x \text{ について } f(x+p) = f(x)$$

となるとき、定数 p を f の**周期** (period) といいます。関数 f の周期があるとき、 f を**周期関数** (periodic function) といいます²⁾。そして、周期関数 f の正の周期のなかで最小のものを f の**基本周期** (fundamental period) といいます。多くの場合、単に周期というとき基本周期のことを意味します。

正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ とは周期関数で、基本周期は 2π です。また、正接関数 $\tan x$ は周期関数で、基本周期は π です。更に次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.9 定数 a, b は実数で $a \neq 0$ とする。関数 $\sin(ax+b)$ 及び関数 $\cos(ax+b)$ は周期関数であり、その基本周期は $\frac{2\pi}{|a|}$ である。また、関数 $\tan(ax+b)$ は周期関数であり、その基本周期は $\frac{\pi}{|a|}$ である。

定数 a, b は実数で $a \neq 0$ とします。関数 $\sin(ax+b)$ 及び $\cos(ax+b)$ の基本周期 $p = \frac{2\pi}{|a|}$ は、 xy 座標平面における $y = \sin(ax+b)$ のグラフ及び $y = \cos(ax+b)$ のグラフにおいて次のように現われます。

関数 $y = \sin(ax+b)$ 及び $y = \cos(ax+b)$ のグラフにおける基本周期

更に次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.10 定数 A, B は実数で $A \neq 0$ とする。周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき、合成関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である。

三角関数の加法定理は重要です。

定理 0.8.11 (正弦関数と余弦関数との加法定理) 任意の実数 a, b について、

$$\begin{aligned} \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (\text{複号同順}), \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (\text{複号同順}). \end{aligned}$$

定理 0.8.12 (正接関数の加法定理) 任意の実数 a, b について、 $\tan a$ の値と $\tan b$ の値と $\tan(a+b)$ または $\tan(a-b)$ の値があるとき、

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad (\text{複号同順}).$$

加法定理より以下の公式が導かれます。

定理 0.8.13 任意の実数 a について、

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a, \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a, \end{aligned}$$

$\tan a$ 及び $\tan 2a$ の値があるとき

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

定理 0.8.14 任意の実数 a について、

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}, \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2},$$

$\tan a$ の値があるとき

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

定理 0.8.15 任意の実数 a, b について、

$$\begin{aligned} \sin a \sin b &= -\frac{1}{2} \{ \cos(a+b) - \cos(a-b) \}, \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} \{ \sin(a+b) + \sin(a-b) \}, \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \}. \end{aligned}$$

定理 0.8.16 任意の実数 a, b について、

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

²⁾ 但し、普通、定数関数は周期関数とは考えません。