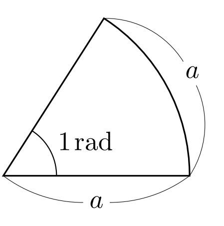
§0.8　三角関数

半径との弧の長さが等しい扇形の中心角の大きさを 1 rad と定義します．弧度法の単位 “rad” と度数法の単位 “°” との間には次の関係が成り立ちます：



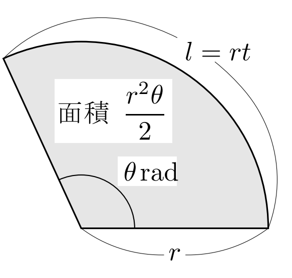
$$\pi\,\mathrm{rad} = 180^\circ\ .$$

この等式より以下の等式が導かれます：任意の実数 θ, Θ について，

$$\theta\,\mathrm{rad} = \frac{\theta}{\pi}\pi\,\mathrm{rad} = \frac{\theta}{\pi}180^\circ = \left(\frac{180\theta}{\pi}\right)^\circ\ ,$$
$$\Theta^\circ = \left(\frac{\Theta}{180}180\right)^\circ = \frac{\Theta}{180}180^\circ = \frac{\Theta}{180}\pi\,\mathrm{rad} = \frac{\pi\Theta}{180}\mathrm{rad}\ .$$

次の定理が成り立ちます．

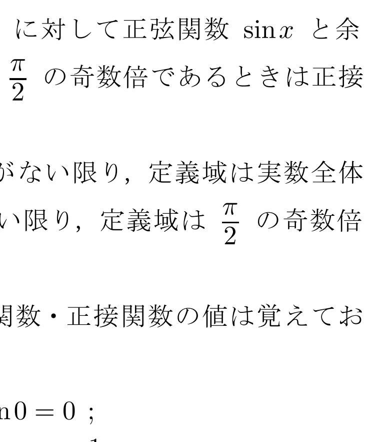
> **定理 0.8.1**　任意の扇形について，半径が r で中心角の大きさが θrad で弧の長さが l であるとき　$l = r\theta$ ．



定理 0.8.2　半径が r で中心角の大きさが θrad である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$ ．

正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$, 正接関数 $\tan x$ を定義します．

定義　任意の実数 x に対して，正弦関数の値 $\sin x$, 余弦関数の値 $\cos x$, 正接関数の値 $\tan x$ を次のように定義する： XY 座標平面において，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する一般角 $x$rad の動径に属す点 $\mathrm{P} = (a, b)$ （但し $\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ ）について $\overline{\mathrm{OP}} = r$ とおくとき，



$$\sin x = \frac{b}{r}\ , \qquad \cos x = \frac{a}{r}\ ,$$
$$a \neq 0 \text{ のとき}\quad \tan x = \frac{b}{a}\ .$$

これらの関数を三角関数といいます．任意の実数 x に対して正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ との値が定義されます．ところが， x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍であるときは正接関数 $\tan x$ の値は存在しません．
以後，正弦関数または余弦関数を扱うとき，特に断りがない限り，定義域は実数全体とします．また，正接関数を扱うとき，特に断りがない限り，定義域は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数全体とします．

実数 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ の各々に対する正弦関数・余弦関数・正接関数の値は覚えておいて下さい：

$$\sin 0 = 0\ , \qquad \cos 0 = 1\ , \qquad \tan 0 = 0\ ;$$
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ , \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;$$
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ , \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1\ ;$$
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ , \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ .$$
$$\sin\frac{\pi}{2} = 1\ , \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0\ , \qquad \tan\frac{\pi}{2}\ :\ \text{値無し}\ .$$

更に正割関数，余接関数，余割関数，の 3 個の三角関数を定義します． $\cos x \neq 0$ である実数 x に対して，正割関数の値 $\sec x$ を以下のように定義します：

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\ .$$

また， $\sin x \neq 0$ である実数 x に対して，余接関数の値 $\cot x$ 及び余割関数の値 $\mathrm{cosec}\, x$ を以下のように定義します：

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\ , \qquad \mathrm{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}\ .$$

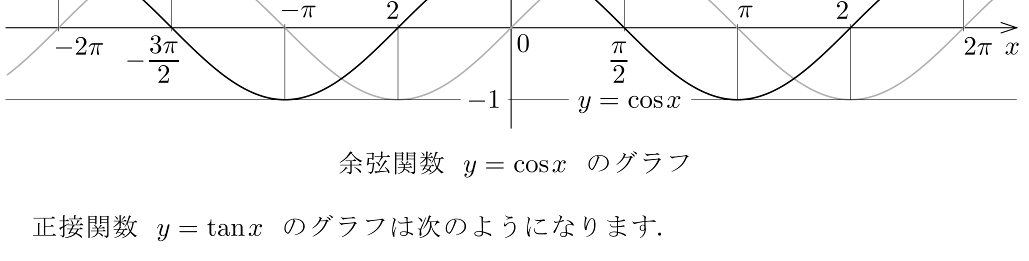
三角関数の定義よりの定理が導かれます．

> **定理 0.8.3**　任意の実数 x について， x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，
> $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

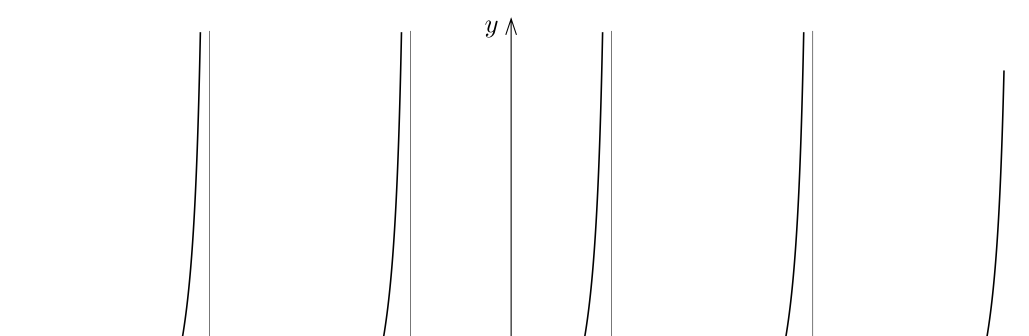
> **定理 0.8.4**　任意の実数 x について
> $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ .$$

> **定理 0.8.5**　任意の実数 x について， x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，
> $$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\ .$$

座標平面において，正弦関数 $\sin x$ のグラフと余弦関数 $\cos x$ のグラフとは同じ形の曲線になります．この形の曲線を正弦曲線といいます．

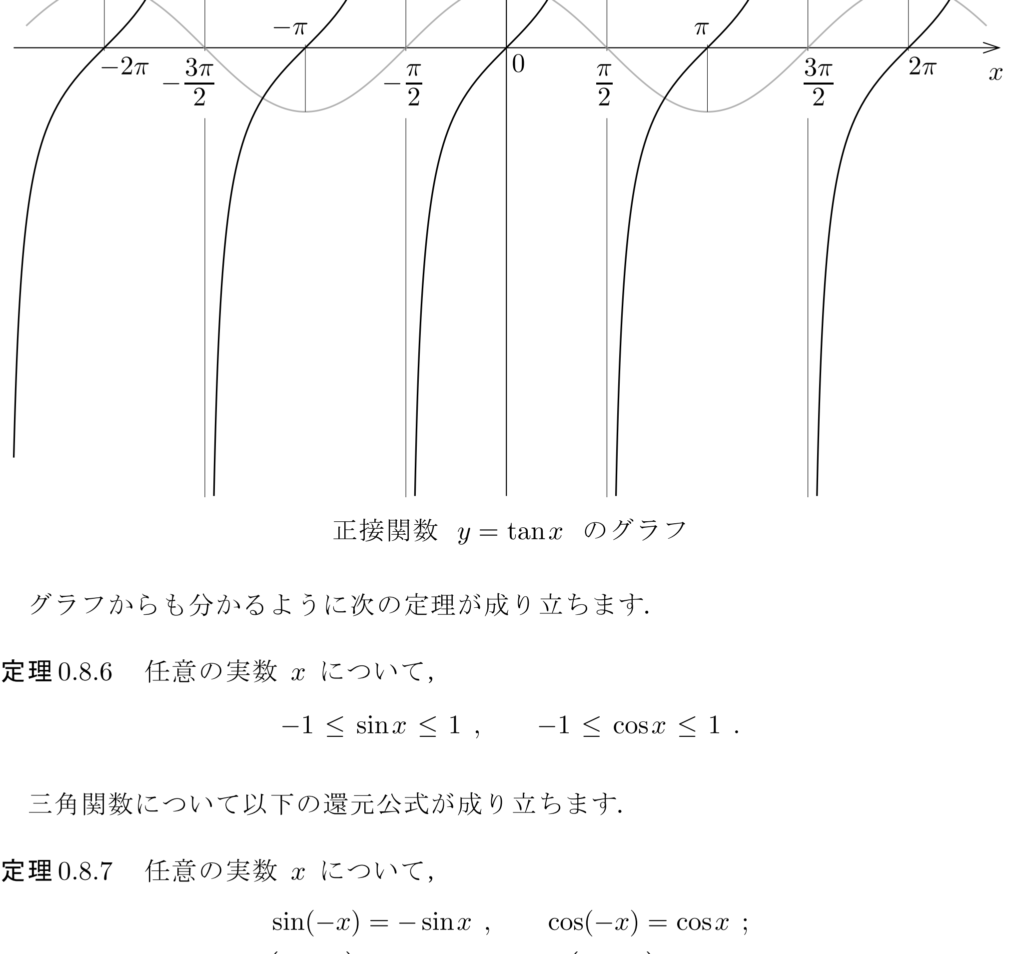


正弦関数　$y = \sin x$　のグラフ



余弦関数　$y = \cos x$　のグラフ

正接関数　$y = \tan x$　のグラフは次のようになります．



正接関数　$y = \tan x$　のグラフ

グラフからも分かるように次の定理が成り立ちます．

定理 0.8.6　任意の実数 x について，

$$-1 \leq \sin x \leq 1\ , \qquad -1 \leq \cos x \leq 1\ .$$

三角関数について以下の還元公式が成り立ちます．

定理 0.8.7　任意の実数 x について，

$$\sin(-x) = -\sin x\ , \qquad \cos(-x) = \cos x\ ;$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\ , \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x\ ;$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x\ , \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x\ .$$

任意の整数 n 及び任意の実数 x について，

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x\ , \qquad \cos(x + 2n\pi) = \cos x\ .$$

定理 0.8.8　任意の実数について， x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

$$\tan(-x) = -\tan x\ .$$

任意の整数 n 及び任意の実数 x について， x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき，

$$\tan(x + n\pi) = \tan x\ .$$

関数 f 及び 0 でない定数 p について，

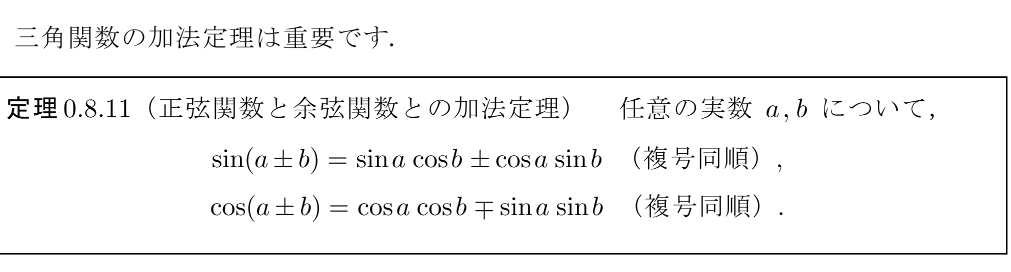
$$f \text{ の定義域の任意の点 } x \text{ について}\quad f(x + p) = f(x)$$

となるとき，定数 p を f の**周期** (period) といいます．関数 f の周期があるとき， f を**周期関数** (periodic function) といいます [2]．そして，周期関数 f の正の周期のなかで最小のものを f の基本周期 (fundamental period) といいます．多くの場合，単に周期というと基本周期のことを意味します．

正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ とは周期関数で，基本周期は 2π です．また，正接関数 $\tan x$ は周期関数で，基本周期は π です．更に次の定理が成り立ちます．

> **定理 0.8.9**　定数 a, b は実数で $a \neq 0$ とする．関数 $\sin(ax + b)$ 及び関数 $\cos(ax + b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\frac{2\pi}{|a|}$ である．また，関数 $\tan(ax + b)$ は周期関数であり，その基本周期は $\frac{\pi}{|a|}$ である．

定数 a, b は実数で $a \neq 0$ とします．関数 $\sin(ax + b)$ 及び $\cos(ax + b)$ の基本周期 $p = \frac{2\pi}{|a|}$ は， xy 座標平面における $y = \sin(ax + b)$ のグラフ及び $y = \cos(ax + b)$ のグラフにおいて次のように現われます．



関数　$y = \sin(ax + b)$　及び　$y = \cos(ax + b)$　のグラフにおける基本周期

更に次の定理が成り立ちます．

定理 0.8.10　定数 A, B は実数で $A \neq 0$ とする．周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき，合成関数 $Af(x) + B$ も周期関数でその基本周期は p である．

三角関数の加法定理は重要です．

> **定理 0.8.11**（正弦関数と余弦関数との加法定理）　任意の実数 a, b について，
> $$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \text{（複号同順）},$$
> $$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad \text{（複号同順）}.$$

定理 0.8.12（正接関数の加法定理）　任意の実数 a, b について， $\tan a$ の値と $\tan b$ の値と $\tan(a + b)$ または $\tan(a - b)$ の値があるとき，

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad \text{（複号同順）}.$$

加法定理より以下の公式が導かれます．

定理 0.8.13　任意の実数 a について，

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a\ ,$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\ ,$$

$\tan a$ 及び $\tan 2a$ の値があるとき

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}\ .$$

定理 0.8.14　任意の実数 a について，

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}\ , \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}\ ,$$

$\tan a$ の値があるとき

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}\ .$$

定理 0.8.15　任意の実数 a, b について，

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a + b) - \cos(a - b)\}\ ,$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a + b) + \sin(a - b)\}\ ,$$
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a + b) + \cos(a - b)\}\ .$$

定理 0.8.16　任意の実数 a, b について，

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2}\ ,$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}\ ,$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2}\ ,$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}\ .$$

---

[2] 但し，普通，定数関数は周期関数とは考えません．