

§0.8 三角関数

半径との弧の長さが等しい扇形の中心角の大きさを 1rad と定義します。弧度法の単位 “rad” と度数法の単位 “°” との間には次の関係が成り立ちます：

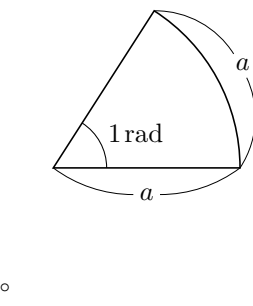
$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

この等式より以下の等式が導かれます：任意の実数 θ, Θ について、

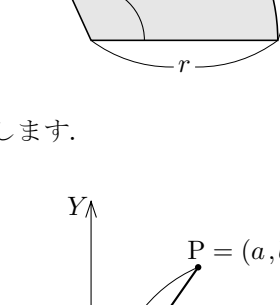
$$\begin{aligned}\theta \text{ rad} &= \frac{\theta}{\pi} \pi \text{ rad} = \frac{\theta}{\pi} 180^\circ = \left(\frac{180\theta}{\pi} \right)^\circ, \\ \Theta^\circ &= \left(\frac{\Theta}{180} 180 \right)^\circ = \frac{\Theta}{180} 180^\circ = \frac{\Theta}{180} \pi \text{ rad} = \frac{\pi\Theta}{180} \text{ rad}.\end{aligned}$$

次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.1 任意の扇形について、半径が r で中心角の大きさが $\theta \text{ rad}$ で弧の長さが l であるとき $l = r\theta$.



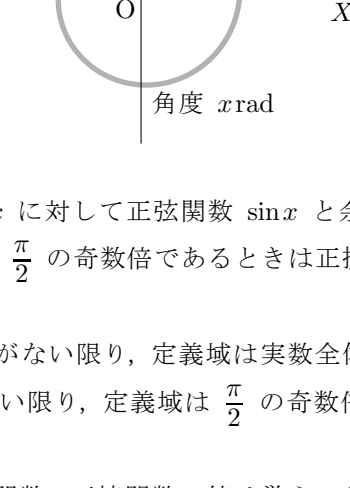
定理 0.8.2 半径が r で中心角の大きさが $\theta \text{ rad}$ である扇形で囲まれる図形の面積は $\frac{1}{2}r^2\theta$.



正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$, 正接関数 $\tan x$ を定義します。

定義 任意の実数 x に対して、正弦関数の値 $\sin x$, 余弦関数の値 $\cos x$, 正接関数の値 $\tan x$ を次のように定義する： XY 座標平面において、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する一般角 $x \text{ rad}$ の動径に属する点 $P = (a, b)$ (但し $P \neq O$) について $\overline{OP} = r$ とおくと、

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{b}{r}, & \cos x &= \frac{a}{r}, \\ a \neq 0 \text{ のとき } \tan x &= \frac{b}{a}.\end{aligned}$$



これらの関数を三角関数といいます。任意の実数 x に対して正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ との値が定義されます。ところが、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍であるときは正接関数 $\tan x$ の値は存在しません。

以後、正弦関数または余弦関数を扱うとき、特に断りがない限り、定義域は実数全体とします。また、正接関数を扱うとき、特に断りがない限り、定義域は $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数全体とします。

実数 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ の各々に対する正弦関数・余弦関数・正接関数の値は覚えておいて下さい：

$$\begin{aligned}\sin 0 &= 0, & \cos 0 &= 1, & \tan 0 &= 0; \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2}, & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\sqrt{3}}; \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \tan \frac{\pi}{4} &= 1; \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2}, & \tan \frac{\pi}{3} &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \tan \frac{\pi}{2} : \text{値無し}.$$

更に正割関数, 余接関数, 余割関数, の3個の三角関数を定義します。 $\cos x \neq 0$ である実数 x に対して、正割関数の値 $\sec x$ を以下のように定義します：

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

また、 $\sin x \neq 0$ である実数 x に対して、余接関数の値 $\cot x$ 及び余割関数の値 $\operatorname{cosec} x$ を以下のように定義します：

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

三角関数の定義よりの定理が導かれます。

定理 0.8.3 任意の実数 x について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

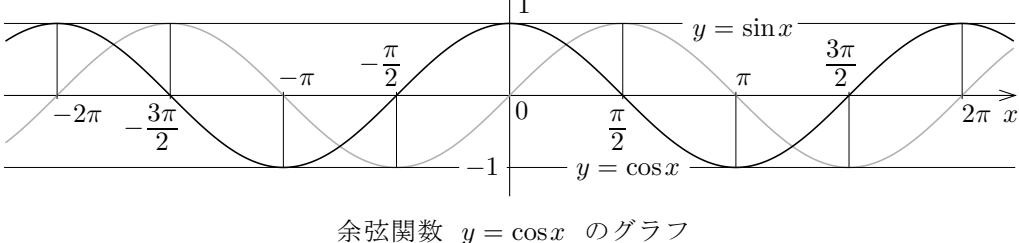
定理 0.8.4 任意の実数 x について

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

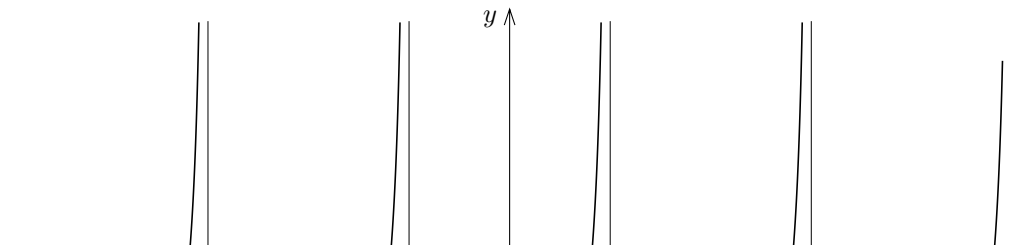
定理 0.8.5 任意の実数 x について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

座標平面において、正弦関数 $\sin x$ のグラフと余弦関数 $\cos x$ のグラフとは同じ形の曲線になります。この形の曲線を正弦曲線といいます。

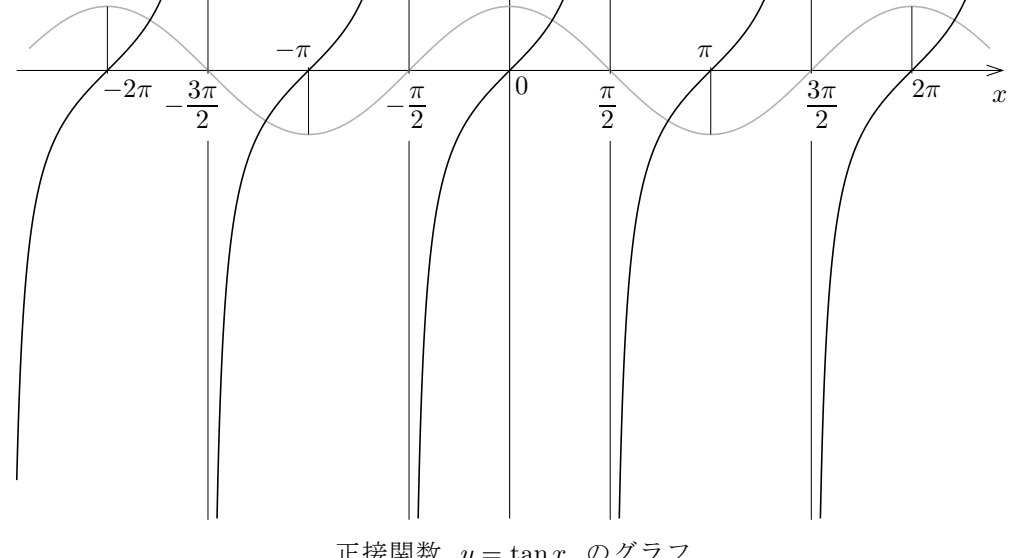


正弦関数 $y = \sin x$ のグラフ



余弦関数 $y = \cos x$ のグラフ

正接関数 $y = \tan x$ のグラフは次のようになります。



正接関数 $y = \tan x$ のグラフ

グラフからも分かるように次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.6 任意の実数 x について、

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

三角関数について以下の還元公式が成り立ちます。

定理 0.8.7 任意の実数 x について、

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin x, & \cos(-x) &= \cos x; \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x; \\ \sin(x + \pi) &= -\sin x, & \cos(x + \pi) &= -\cos x.\end{aligned}$$

任意の整数 n 及び任意の実数 x について、

$$\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2n\pi) = \cos x.$$

定理 0.8.8 任意の実数について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$\tan(-x) = -\tan x.$$

任意の整数 n 及び任意の実数 x について、 x が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でないとき、

$$\tan(x + n\pi) = \tan x.$$

関数 f 及び 0 でない定数 p について、

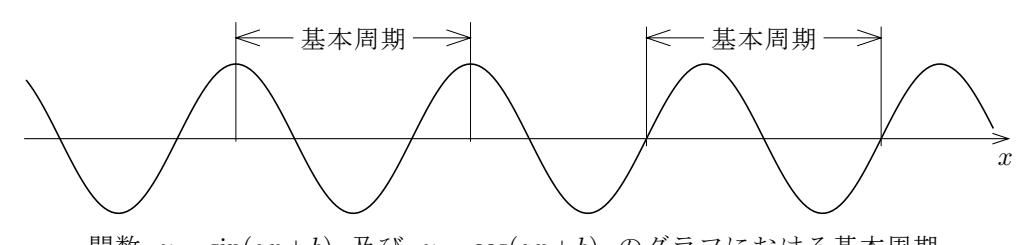
$$f \text{ の定義域の任意の点 } x \text{ について } f(x+p) = f(x)$$

となるとき、定数 p を f の**周期** (period) といいます。関数 f の周期があるとき、 f を**周期関数** (periodic function) といいます²⁾。そして、周期関数 f の正の周期のなかで最小のものを f の**基本周期** (fundamental period) といいます。多くの場合、単に周期というと基本周期のことを意味します。

正弦関数 $\sin x$ と余弦関数 $\cos x$ とは周期関数で、基本周期は 2π です。また、正接関数 $\tan x$ は周期関数で、基本周期は π です。更に次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.9 定数 a, b は実数で $a \neq 0$ とする。関数 $\sin(ax+b)$ 及び関数 $\cos(ax+b)$ は周期関数であり、その基本周期は $\frac{2\pi}{|a|}$ である。また、関数 $\tan(ax+b)$ は周期関数であり、その基本周期は $\frac{\pi}{|a|}$ である。

定数 a, b は実数で $a \neq 0$ とします。関数 $\sin(ax+b)$ 及び $\cos(ax+b)$ の基本周期 $p = \frac{2\pi}{|a|}$ は、 xy 座標平面における $y = \sin(ax+b)$ のグラフ及び $y = \cos(ax+b)$ のグラフにおいて次のように現われます。



関数 $y = \sin(ax+b)$ 及び $y = \cos(ax+b)$ のグラフにおける基本周期

更に次の定理が成り立ちます。

定理 0.8.10 定数 A, B は実数で $A \neq 0$ とする。周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき、合成関数 $Af(x)+B$ も周期関数でその基本周期は p である。

三角関数の加法定理は重要です。

定理 0.8.11 (正弦関数と余弦関数との加法定理) 任意の実数 a, b について、

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad (\text{複号同順}),$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad (\text{複号同順}).$$

定理 0.8.12 (正接関数の加法定理) 任意の実数 a, b について、 $\tan a$ の値と $\tan b$ の値と $\tan(a+b)$ または $\tan(a-b)$ の値があるとき、

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad (\text{複号同順}).$$

加法定理より以下の公式が導かれます。

定理 0.8.13 任意の実数 a について、

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$\tan a$ 及び $\tan 2a$ の値があるとき

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

定理 0.8.14 任意の実数 a について、

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}, \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2},$$

$\tan a$ の値があるとき

$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

定理 0.8.15 任意の実数 a, b について、

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a+b) - \cos(a-b) \},$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a+b) + \sin(a-b) \},$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \}.$$

定理 0.8.16 任意の実数 a, b について、

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

²⁾ 但し、普通、定数関数は周期関数とは考えません。