

§0.9 逆三角関数

三角関数の逆関数を考えます。

$-1 \leq y \leq 1$ となる任意の実数 y に対して、 $\sin x = y$ 、 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ となる実数 x が唯一つだけあります。従って、定理0.3.3より、区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の逆関数があります。この正弦関数の逆関数を**逆正弦関数**といい、実数 x に対するその値を $\sin^{-1}x$ ³⁾ と書き表します。区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を定義域とする正弦関数 $\sin x$ の値域は区間 $[-1, 1]$ ですから、その逆関数 $\sin^{-1}x$ の定義域は $[-1, 1]$ です。

$-1 \leq y \leq 1$ となる任意の実数 y に対して、 $\cos x = y$ 、 $0 \leq x \leq \pi$ となる実数 x が唯一つだけあります。従って、定理0.3.3より、区間 $[0, \pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の逆関数があります。この余弦関数の逆関数を**逆余弦関数**といい、実数 x に対するその値を $\cos^{-1}x$ ⁴⁾ と書き表します。区間 $[0, \pi]$ を定義域とする余弦関数 $\cos x$ の値域は区間 $[-1, 1]$ ですから、その逆関数 $\cos^{-1}x$ の定義域は $[-1, 1]$ です。

任意の実数 y に対して、 $\tan x = y$ 、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ となる実数 x が唯一つだけあります。従って、定理0.3.3より、区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の逆関数があります。この正接関数の逆関数を**逆正接関数**といい、実数 x に対するその値を $\tan^{-1}x$ ⁵⁾ と書き表します。区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする正接関数 $\tan x$ の値域は実数全体ですから、その逆関数 $\tan^{-1}x$ の定義域は実数全体です。

これらの三角関数の逆関数を逆三角関数といいます。

逆三角関数の値について定義より次のことが成り立ちます。

実数 x について、

$$\begin{aligned} \sin^{-1}x \text{ の値がある条件は } & -1 \leq x \leq 1 \text{ でこのとき } -\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2} ; \\ \cos^{-1}x \text{ の値がある条件は } & -1 \leq x \leq 1 \text{ でこのとき } 0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi ; \\ x \text{ が何であっても } & \tan^{-1}x \text{ の値があつて } -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

逆三角関数は三角関数の逆関数ですから、定理0.3.1より次の定理が導かれます。

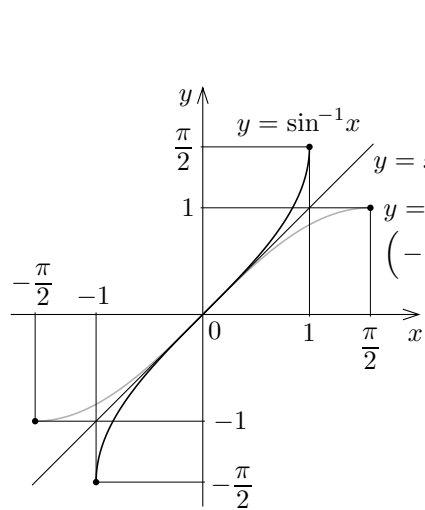
定理 0.9.1

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } & \sin^{-1}(\sin u) = u ; \\ 0 \leq u \leq \pi \text{ である任意の実数 } u \text{ について } & \cos^{-1}(\cos u) = u ; \\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ である任意の実数 } u \text{ について } & \tan^{-1}(\tan u) = u . \end{aligned}$$

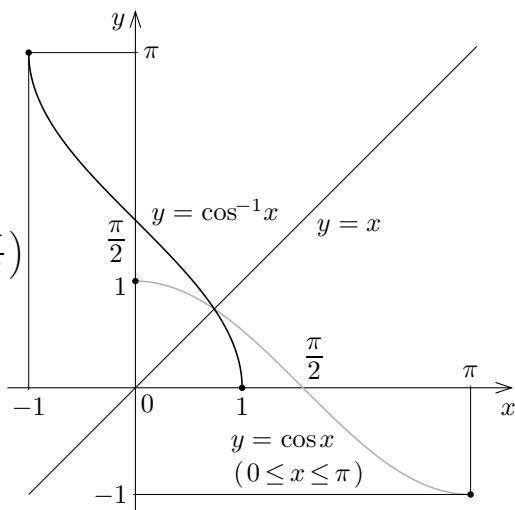
また、

$$\begin{aligned} -1 \leq v \leq 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } & \sin(\sin^{-1}v) = v ; \\ -1 \leq v \leq 1 \text{ である任意の実数 } v \text{ について } & \cos(\cos^{-1}v) = v ; \\ \text{任意の実数 } v \text{ について } & \tan(\tan^{-1}v) = v . \end{aligned}$$

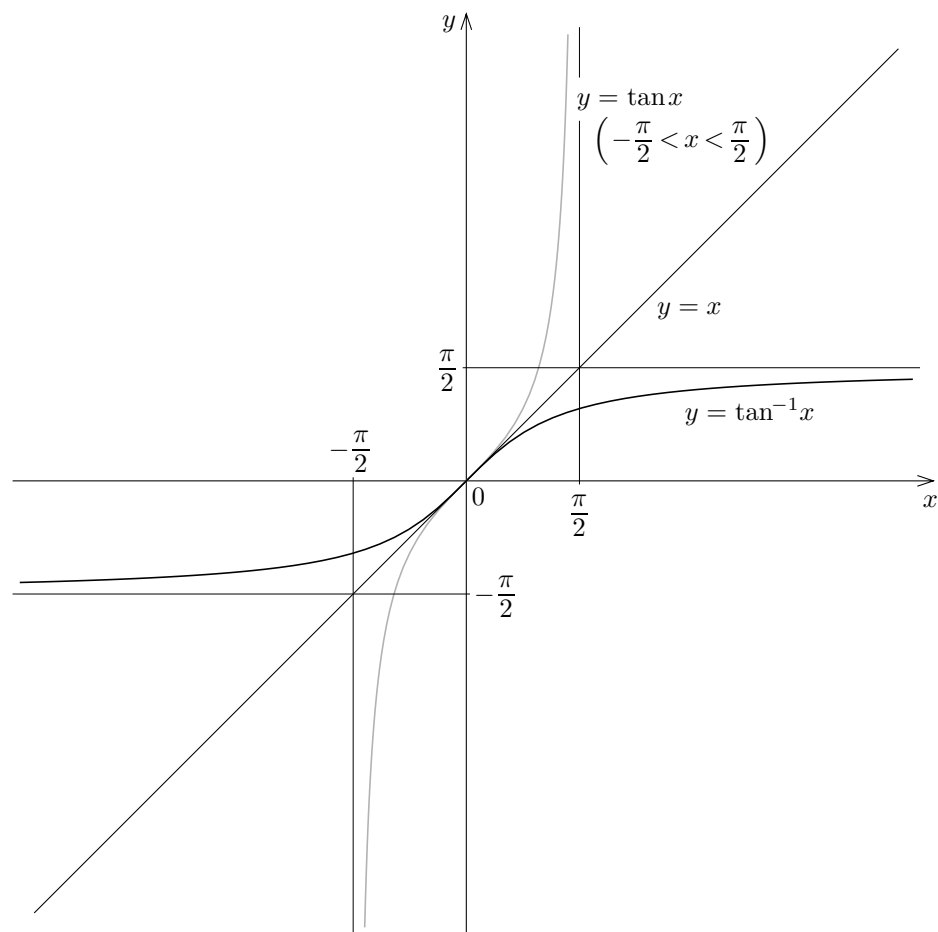
逆三角関数は三角関数の逆関数ですから、定理0.3.6より、 xy 座標平面において逆三角関数のグラフは元の三角関数のグラフと直線 $y = x$ に関して対称です。



逆正弦関数 $y = \sin^{-1}x$ のグラフ



逆余弦関数 $y = \cos^{-1}x$ のグラフ



逆正接関数 $y = \tan^{-1}x$ のグラフ

グラフを見て分かるように、関数 $\sin^{-1}x$ と $\tan^{-1}x$ とは奇関数です。

定理 0.9.2 $-1 \leq x \leq 1$ である任意の実数 x について $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$. 任意の実数 x について $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$.

3) \sin^{-1} は“アークサイン”といいます。

4) \cos^{-1} は“アークコサイン”といいます。

5) \tan^{-1} は“アークタンジェント”といいます。