§1.1　数列の定義

数列 (sequence) とは，定義域が自然数の集合である関数のことです；但し，数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければなりません．例えば，集合 $\{1,2,3,5,6,7\}$ のように途中で抜けた自然数がある集合は数列の定義域になりません．

数列について，関数の値を特に**項**といいます．数列 f について，自然数 n に対する項つまり関数の値 $f(n)$ を第 n 項といいます．第 1 項から始まる数列の第 1 項を特に初項といいます．

数列 a について，自然数 n に対する値つまり第 n 項を $a(n)$ をしばしば a_n と書き表します；そして，数列 a そのものを $\{a_n\}$ と書き表します．つまり，自然数を表す変数 n に対して，

数列 $\{a_n\}$ は n を独立変数とする関数である

ことを理解して下さい．

$\boxed{\text{例}}$　数列 $\{n^2\}$ は，自然数 n に対して $f(n)=n^2$ となる関数 f であり，第 1 項は $f(1)=1^2=1$ ，第 5 項は $f(5)=5^2=25$ ，第 20 項は $f(20)=20^2=400$ ．　$\boxed{\text{終}}$

多くの場合，数列の定義域は，自然数全体 $\{0,1,2,3,4,\dots\}$ あるいは正の自然数全体 $\{1,2,3,4,\dots\}$ のどちらかです．例えば数列 $\{a_n\}$ の定義域が自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ であることを明示するために $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と書き表します．また，例えば数列 $\{b_n\}$ の定義域が正の自然数全体 $\{1,2,3,4,\dots\}$ であることを明示するために $\{b_n\}_{n\geq 1}$ と書き表します．

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n=\sqrt{3n^2-5}$ と定める．m は自然数とする．この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(m+2)$ 項 a_{m+2} を求める．

$$a_4=\sqrt{3\cdot 4^2-5}=\sqrt{43}\ ,$$
$$a_{m+2}=\sqrt{3(m+2)^2-5}=\sqrt{3(m^2+4m+4)-5}=\sqrt{3m^2+12m+7}\ .$$
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.1.1}}$　自然数全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を $a_n=\dfrac{4}{n^2+3n}$ と定めます．自然数 m について $m\geq 4$ とします．この数列の第 5 項 a_5，第 $(m+2)$ 項 a_{m+2}，第 $(m-4)$ 項 a_{m-4}，を求めなさい．

数列 $\{a_n\}$ について，a_{n-1} の値や a_{n-2} の値などから a_n の値を定める等式を**漸化式**といいます．

$\boxed{\text{例}}$　自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，

1 以上の自然数 n に対して　$a_n=3a_{n-1}-5$

とします；このときの等式 $a_n=3a_{n-1}-5$ が漸化式です．更に，$a_0=4$ とします．このとき，

漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=1$ とすると $a_1=3a_0-5=3\cdot 4-5=7$，
漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=2$ とすると $a_2=3a_1-5=3\cdot 7-5=16$，
漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=3$ とすると $a_3=3a_2-5=3\cdot 16-5=43$，
漸化式 $a_n=3a_{n-1}-5$ において $n=4$ とすると $a_4=3a_3-5=3\cdot 43-5=124$，
$\vdots$

というように，次々に $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\dots$ の値を求めることができます．　$\boxed{\text{終}}$

一般的に，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，漸化式

$$a_n=\phi(a_{n-1})\qquad(\,n\geq 1\,)$$

が成り立つとき，

$$a_1=\phi(a_0)\ ,\qquad a_2=\phi(a_1)\ ,\qquad a_3=\phi(a_2)\ ,\qquad a_4=\phi(a_3)\ ,\qquad \cdots$$

のように，a_0 の値が分かれば，順次 $a_1,a_2,a_3,a_4,\dots$ の値を求めることができます．このように，漸化式によって数列を定めることを，数列の**帰納的定義**といいます．

$\boxed{\text{問題 1.1.2}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義します：$a_0=5$ ，1 以上の自然数 n について $a_n=2a_{n-1}-3$ ．a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 の値を求めなさい．

例えば数列 $\{a_n\}_{2\leq n\leq 9}$ の定義域は 2 以上 9 以下の自然数の全体です．この数列のように，定義域が有限集合である数列を有限数列といいます．また例えば数列 $\{a_n\}_{n\geq 2}$ の定義域は 2 以上の自然数の全体です．この数列のように，定義域が無限集合である数列を無限数列といいます．