§1.2　数列の項の総和

数列 f の定義域に属す自然数 m, n について $m \leq n$ とします．f について，m に対する項 $f(m)$ から n に対する項 $f(n)$ までの総和

$$f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n)$$

を $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$ と書き表します：

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m)+f(m+1)+f(m+2)+f(m+3)+\cdots+f(n-1)+f(n)\ .$$

例を挙げます．

$$\sum_{k=3}^{9} \frac{k}{2} = \frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}+\frac{7}{2}+\frac{8}{2}+\frac{9}{2} = \frac{42}{2} = 21\ .$$

$$\sum_{k=2}^{6} k^2 = 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 4+9+16+25+36 = 90\ .$$

式 $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$ に現われる文字 k を他の文字に置き換えても値は同じです．例えば，

$$\sum_{i=2}^{5} \frac{6}{i} = \sum_{j=2}^{5} \frac{6}{j} = \sum_{k=2}^{5} \frac{6}{k} = \frac{6}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{6}{5} = 3+2+\frac{3}{2}+\frac{6}{5} = \frac{77}{10}\ .$$

問題 1.2.1　以下の総和を計算しなさい．

(1) $\sum\limits_{i=0}^{4} \dfrac{i^3}{10}$.　　　(2) $\sum\limits_{j=2}^{5} \dfrac{12}{j+1}$.

総和記号 Σ の性質を幾つか導きます．

4 と 7 とが数列 f の定義域に属すとき，定数 c に対して，総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7} \{cf(k)\} = cf(4)+cf(5)+cf(6)+cf(7) = c\{f(4)+f(5)+f(6)+f(7)\}\ ;$$

Σ の定義より $\sum\limits_{k=4}^{7} f(k) = f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$ なので，

$$\sum_{k=4}^{7} \{cf(k)\} = c\sum_{k=4}^{7} f(k)\ .$$

一般的に次の定理が成り立ちます．

> **定理 1.2.1**　$m \leq n$ である自然数 m, n が数列 f の定義域に属すとき，定数 c に対して，
>
> $$\sum_{k=m}^{n} \{cf(k)\} = c\sum_{k=m}^{n} f(k)\ .$$

5 と 7 とが数列 f と g との両方の定義域に属すとき，総和記号 Σ の定義より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{7} \{f(k)+g(k)\} &= f(5)+g(5)+f(6)+g(6)+f(7)+g(7)\\ &= f(5)+f(6)+f(7)+g(5)+g(6)+g(7)\ .\end{aligned}$$

Σ の定義より $\sum\limits_{k=5}^{7} f(k) = f(5)+f(6)+f(7)$, $\sum\limits_{k=5}^{7} g(k) = g(5)+g(6)+g(7)$ なので，

$$\sum_{k=5}^{7} \{f(k)+g(k)\} = \sum_{k=5}^{7} f(k) + \sum_{k=5}^{7} g(k)\ .$$

一般的に次の定理が成り立ちます．

> **定理 1.2.2**　$m \leq n$ である自然数 m, n が数列 f と g との定義域に属すとき，
>
> $$\sum_{k=m}^{n} \{f(k) \pm g(k)\} = \sum_{k=m}^{n} f(k) \pm \sum_{k=m}^{n} g(k)\quad（複号同順）\ .$$

総和記号 Σ に関する重要な計算技法を説明します．

例解　4 と 7 とが定義域に属す数列 f に対して $\sum\limits_{k=4}^{7} \{f(k)-f(k+1)\}$ を計算します．

総和記号 Σ の定義より

$$\sum_{k=4}^{7} \{f(k)-f(k+1)\} = f(4)-f(5)\ +f(5)-f(6)\ +f(6)-f(7)\ +f(7)-f(8)\ .$$

この式では，$-f(5)$ と $+f(5)$ とが，$-f(6)$ と $+f(6)$ とが，$-f(7)$ と $+f(7)$ とが，相殺されて消えます：

$$f(4)-f(5)\ +f(5)-f(6)\ +f(6)-f(7)\ +f(7)-f(8) = f(4)-f(8)\ .$$

従って $\sum\limits_{k=4}^{7} \{f(k)-f(k+1)\} = f(4)-f(8)$.　　　終

例題　総和 $\sum\limits_{i=3}^{30} \left(\dfrac{7}{i} - \dfrac{7}{i+1}\right)$ を計算する．

〔解説〕

$$\begin{aligned}&\sum_{i=3}^{30} \left(\frac{7}{i} - \frac{7}{i+1}\right)\\ &= \frac{7}{3}-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}-\frac{7}{5}+\frac{7}{5}-\frac{7}{6}+\frac{7}{6}-\frac{7}{7}+\cdots+\frac{7}{28}-\frac{7}{29}+\frac{7}{29}-\frac{7}{30}+\frac{7}{30}-\frac{7}{31}\ .\end{aligned}$$

この式では次のように項が相殺されて消える．

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{7}{3} & -\frac{7}{4} & & & & & & \\
 & +\frac{7}{4} & -\frac{7}{5} & & & & & \\
 & & +\frac{7}{5} & -\frac{7}{6} & & & & \\
 & & & +\frac{7}{6} & -\frac{7}{7} & & & \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & +\frac{7}{28} & -\frac{7}{29} & & \\
 & & & & & +\frac{7}{29} & -\frac{7}{30} & \\
 & & & & & & +\frac{7}{30} & -\frac{7}{31} \\
\hline
\frac{7}{3} & & & & & & & -\frac{7}{31}
\end{array}$$

故に $\sum\limits_{i=3}^{30} \left(\dfrac{7}{i} - \dfrac{7}{i+1}\right) = \dfrac{7}{3} - \dfrac{7}{31} = \dfrac{217-21}{93} = \dfrac{196}{93}$.　　　終

問題 1.2.2　総和 $\sum\limits_{i=7}^{48} \left(\dfrac{24}{i-1} - \dfrac{24}{i}\right)$ を計算しなさい．

例題　総和 $\sum\limits_{j=4}^{30} \left(\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}\right)$ を計算する．

〔解説〕

$$\begin{aligned}&\sum_{j=4}^{30} \left(\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}\right)\\ &= \sqrt{13}-\sqrt{10}\ +\sqrt{16}-\sqrt{13}\ +\sqrt{19}-\sqrt{16}\ +\cdots+\sqrt{88}-\sqrt{85}\ +\sqrt{91}-\sqrt{88}\ .\end{aligned}$$

この式では次のように項が相殺されて消える．

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & & \sqrt{13} & -\sqrt{10} \\
 & & & & +\sqrt{16} & -\sqrt{13} & \\
 & & & +\sqrt{19} & -\sqrt{16} & & \\
 & & +\sqrt{21} & -\sqrt{19} & & & \\
 & & \vdots & & & & \\
 & +\sqrt{88} & -\sqrt{85} & & & & \\
+\sqrt{91} & -\sqrt{88} & & & & & \\
\hline
\sqrt{91} & & & & & & -\sqrt{10}
\end{array}$$

従って $\sum\limits_{j=4}^{30} \left(\sqrt{3j+1} - \sqrt{3j-2}\right) = \sqrt{91} - \sqrt{10}$.　　　終

問題 1.2.3　総和 $\sum\limits_{j=2}^{28} \left(\sqrt{5j+4} - \sqrt{5j-1}\right)$ を計算しなさい．