§1.3　数列の項の総和の公式

数列の項の和の公式をいくつか導きます.

数列 f について，総和記号 Σ の定義より,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \underbrace{f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)+f(n)}_{n\text{ 個の項の和}} \ .$$

ここで，定数 c に対して，数列の項 $f(k)$ を $f(k)=c$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） と定めます. $f(1)=c$, $f(2)=c$, $f(3)=c$, $f(4)=c$, $\ldots$, $f(n-1)=c$, $f(n)=c$ なので,

$$\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+c+\cdots+c+c}_{n\text{ 個の項の和}} = cn \ .$$

同様に，等式

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \underbrace{f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n-1)+f(n)}_{(n+1)\text{ 個の項の和}}$$

において $f(k)=c$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ） とすると, $f(0)=c$, $f(1)=c$, $f(2)=c$, $f(3)=c$, $f(4)=c$, $\ldots$, $f(n-1)=c$, $f(n)=c$ なので,

$$\sum_{k=0}^{n} c = \underbrace{c+c+c+c+c+\cdots+c+c}_{(n+1)\text{ 個の項の和}} = c(n+1) \ .$$

定理 1.3.1　正の自然数 n 及び定数 c に対して,

$$\sum_{k=1}^{n} c = cn \ , \qquad \sum_{k=0}^{n} c = c(n+1) \ .$$

以下の公式が成り立ちます.

定理 1.3.2　正の自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

定理 1.3.3　正の自然数 n について

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \ .$$

定理 1.3.4　正の自然数 n について

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \ .$$

定理 1.3.2 を証明します. $\sum_{k=1}^{n} k$ を計算するために, $k=P(k-1)-P(k)$ となる k の 2 次式 $P(k)$ を捜します. $P(k)=ak^2+bk$ （ a,b は定数）とおくと,

$$P(k-1)-P(k) = a(k-1)^2+b(k-1)-(ak^2+bk) = -2ak+a-b \ .$$

k に関する恒等式 $P(k-1)-P(k)=k$ つまり $-2ak+a-b=k$ が成り立つ条件は, $-2a=1$ かつ $a-b=0$ ；この連立方程式を解くと, $a=-\frac{1}{2}$ かつ $b=-\frac{1}{2}$. そこで

$$P(k) = -\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k$$

とおきます. $k=P(k-1)-P(k)$ なので，自然数 n について,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\\ &= P(0)-P(n) = 0-\left(-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right) = \frac{n^2+n}{2}\\ &= \frac{n(n+1)}{2} \ .\end{aligned}$$

故に

$$1+2+3+4+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

更に,

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+3+\cdots+n = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

こうして定理 1.3.2 が証明されました.

定理 1.3.2 は次のように考えることもできます. $S=\sum_{k=1}^{n} k$ とおきます：

$$S = 1+2+3+4+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)+n \ .$$

項を並べる順番を全く逆にすると,

$$S = n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+4+3+2+1 \ .$$

この 2 つの等式の，左辺どうしを足して，右辺の 1 番目の項どうしを足して，2 番目の項どうしを足して，3 番目の項どうしを足して，というように計算します.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\boxed{\begin{matrix}S\\S\end{matrix}} & \begin{matrix}=\\=\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\n\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}2\\n-1\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\n-2\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}4\\n-3\end{matrix}} & \begin{matrix}+\cdots+\\+\cdots+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n-3\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n-2\\3\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n-1\\2\end{matrix}} & \begin{matrix}+\\+\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}n\\1\end{matrix}}\\
\downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す} & & \downarrow\text{足す}\\
\boxed{2S} & = & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & +\cdots+ & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1} & + & \boxed{n+1}
\end{array}$$

この等式の右辺は $n+1$ を n 個足しているので,

$$2S = (n+1)\times n \ ,$$

よって $S=\frac{n(n+1)}{2}$ つまり $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

定理 1.3.3 を証明します. $\sum_{k=1}^{n} k^2$ を計算するために, $k^2=P(k-1)-P(k)$ となる k の 3 次式 $P(k)$ を捜します. $P(k)=ak^3+bk^2+ck$ （ a,b,c は定数）とおくと,

$$\begin{aligned}P(k-1)-P(k) &= a(k-1)^3+b(k-1)^2+c(k-1)-(ak^3+bk^2+ck)\\ &= ak^3-3ak^2+3ak-a+bk^2-2k+b-ck-c-ak^3-bk^2-ck\\ &= -3ak^2+(3a-2b)k-a+b-c \ .\end{aligned}$$

k に関する恒等式 $P(k-1)-P(k)=k^2$ つまり $-3ak^2+(3a-2b)k-a+b-c=k^2$ が成り立つ条件は, $-3a=1$ かつ $3a-2b=0$ かつ $-a+b-c=0$ ；この連立方程式を解くと, $a=-\frac{1}{3}$ かつ $b=-\frac{1}{2}$ かつ $c=-\frac{1}{6}$. そこで

$$P(k) = -\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{6}$$

とします. $k^2=P(k-1)-P(k)$ なので，自然数 n について,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{P(k-1)-P(k)\}\\ &= P(0)-P(1)+P(1)-P(2)+P(2)-P(3)+P(3)-P(4)+\cdots\\ &\qquad +P(n-2)-P(n-1)+P(n-1)-P(n)\\ &= P(0)-P(n) = 0-\left(-\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{6}n\right) = \frac{2n^2+3n+n}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .\end{aligned}$$

故に

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$

更に,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= 0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .\end{aligned}$$

こうして定理 1.3.3 が証明されました.

定理 1.3.4 も同じような方法で証明できます.

例題　総和 $\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4}$ を計算する.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\frac{3k-5}{4} &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{20}(3k-5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{k=0}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}5\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(3\cdot\frac{20\cdot 21}{2}-5\cdot 20\right) = \frac{20}{4}\left(\frac{3\cdot 21}{2}-5\right) = 5\cdot\frac{51}{2}\\ &= \frac{255}{2} \ .\end{aligned}$$

終

計算の途中の式で共通因数を括り出すとしばしば計算が簡単になります.

問題 1.3.1　総和 $\sum_{k=1}^{30}\frac{5k-7}{6}$ を計算しなさい.

例題　総和 $\sum_{i=1}^{10}\frac{4i^2-3i}{5}$ を計算する.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{10}\frac{4i^2-3i}{5} &= \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}(4i^2-3i) = \frac{1}{5}\left(4\sum_{i=1}^{10}i^2-3\sum_{i=1}^{10}i\right) = \frac{1}{5}\left(4\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}\right)\\ &= \frac{10\cdot 11}{5}\left(\frac{4\cdot 21}{6}-\frac{3}{2}\right) = 22\left(14-\frac{3}{2}\right) = 11\cdot(28-3) = 11\cdot 25\\ &= 275 \ .\end{aligned}$$

終

問題 1.3.2　総和 $\sum_{i=1}^{20}\frac{j^2-7j}{10}$ を計算しなさい.

例題　自然数 n に対して総和 $\sum_{i=0}^{n}\frac{3i^2+5}{4}$ を計算する.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\frac{3i^2+5}{4} &= \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}(3i^2+5) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{i=0}^{n}i^2+\sum_{i=0}^{n}5\right)\\ &= \frac{1}{4}\left\{3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5(n+1)\right\}\\ &= \frac{n+1}{4}\left\{\frac{n(2n+1)}{2}+5\right\} = \frac{n+1}{4}\cdot\frac{2n^2+n+10}{2}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+10)}{8} \ .\end{aligned}$$

終

文字を含む計算でも途中の式で共通因数を括り出すとしばしば計算が簡単になります.

問題 1.3.3　自然数 n に対して総和 $\sum_{i=0}^{n}\frac{4i^2-3}{5}$ を計算しなさい.

例題　正の自然数 n に対して総和 $\sum_{j=1}^{n}\frac{j(4j-5)}{3}$ を計算する.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\frac{n(4j-5)}{3} &= \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n}(4j^2-5j) = \frac{1}{3}\left(4\sum_{j=0}^{n}j^2-5\sum_{j=0}^{n}j\right)\\ &= \frac{1}{3}\left\{4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-5\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}\\ &= \frac{n(n+1)}{3}\left\{\frac{2(2n+1)}{3}-\frac{5}{2}\right\} = \frac{n(n+1)}{3}\cdot\frac{8n+4-15}{6}\\ &= \frac{n(n+1)(8n-11)}{18} \ .\end{aligned}$$

終

問題 1.3.4　正の自然数 n に対して総和 $\sum_{j=1}^{n}\frac{j(3j-4)}{5}$ を計算しなさい.