§1.4　等差数列

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad (d \text{ は } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を**等差数列**といい，定数 d をその**公差**といいます．

例　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とします． 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので，

$$\begin{aligned}
&a_n = a_{n-1}+10 \text{ において } n=4 \text{ とすると } a_4 = a_3+10 = 49+10 = 59\ ,\\
&a_n = a_{n-1}+10 \text{ において } n=5 \text{ とすると } a_5 = a_4+10 = 59+10 = 69\ ,\\
&a_n = a_{n-1}+10 \text{ において } n=6 \text{ とすると } a_6 = a_5+10 = 69+10 = 79\ ,\\
&a_n = a_{n-1}+10 \text{ において } n=7 \text{ とすると } a_7 = a_6+10 = 79+10 = 89\ ,\\
&\qquad\vdots\ .
\end{aligned}$$

また，正の各自然数 n について $a_{n-1} = a_n - 10$ なので，

$$\begin{aligned}
&a_{n-1} = a_n-10 \text{ において } n=3 \text{ とすると } a_2 = a_3-10 = 49-10 = 39\ ,\\
&a_{n-1} = a_n-10 \text{ において } n=2 \text{ とすると } a_1 = a_2-10 = 39-10 = 29\ ,\\
&a_{n-1} = a_n-10 \text{ において } n=1 \text{ とすると } a_0 = a_1-10 = 29-10 = 19\ .
\end{aligned}$$

終

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差を d とおきます． 漸化式 $a_n = a_{n-1} + d$ を用いて，自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \ldots$ を計算していくと，

$$\begin{aligned}
a_{m+1} &= a_m + d = a_m + d\ ,\\
a_{m+2} &= a_{m+1} + d = (a_m + d) + d = a_m + 2d\ ,\\
a_{m+3} &= a_{m+2} + d = (a_m + 2d) + d = a_m + 3d\ ,\\
a_{m+4} &= a_{m+3} + d = (a_m + 3d) + d = a_m + 4d\ ,\\
a_{m+5} &= a_{m+4} + d = (a_m + 4d) + d = a_m + 5d\ ,\\
&\vdots\ .
\end{aligned}$$

このように，各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$ となります．

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd
\end{array}\ .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m + dk$ において $m + k = n$ とおきます； $k = n - m$ ですから，$a_n = a_m + d(n-m)$ となります．

定理 1.4　数列 $\{a_n\}$ が公差 d の等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の任意の自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n-m)$ ．

この定理 1.4 より次のようになります：第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が公差 d の等差数列であるとき，

$$\text{任意の正の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 + d(n-1)\ ;$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとき，

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 + dn\ .$$

例題　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差 -3 の等差数列で， $a_5 = 7$ とする． 自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差 -3 の等差数列なので，任意の自然数 n に対して，

$$a_n = a_5 + (-3)(n-5) = 7 - 3n + 15 = 22 - 3n\ .$$

終

問題 1.4.1　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差 $-\dfrac{3}{2}$ の等差数列で， $a_7 = 5$ とします． 1 以上の自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい．

例題　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について $a_3 = 7$ ， $a_8 = 27$ とする． 1 以上の自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す．

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の公差を d とおく． $a_8 = a_3 + d(8-3)$ なので， $27 = 7 + 5d$ ， $5d = 20$ ， $d = 4$ ． 正の各自然数 n に対して，

$$a_n = a_3 + 4(n-3) = 7 + 4n - 12 = 4n - 5\ .$$

終

問題 1.4.2　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について， $a_5 = 22$ ， $a_{11} = 4$ とします． 自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい．

例題　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差 2 の等差数列で，第 1 項は $a_1 = 5$ とする． 自然数 n に対して総和 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ を計算する．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差 2 の等差数列なので，1 以上の各自然数 k に対して

$$a_k = a_1 + 2(k-1) = 5 + 2k - 2 = 2k + 3\ .$$

総和 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ は，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (2k+3) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3 = 2\frac{n(n+1)}{2} + 3n\\
&= n(n+4)\ .
\end{aligned}$$

終

問題 1.4.3　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差 4 の等差数列で，第 0 項は $a_0 = 5$ とします． 正の自然数 m に対して総和 $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k$ を計算しなさい．