§1.4　等差数列

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad (d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を**等差数列**といい，定数 d をその**公差**といいます.

$\boxed{\text{例}}$　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について公差は 10 であり $a_3 = 49$ とします. 正の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので，

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 4$ とすると $a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 5$ とすると $a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 6$ とすると $a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 7$ とすると $a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89$,

$\vdots$.

また，正の各自然数 n について $a_{n-1} = a_n - 10$ なので，

$a_{n-1} = a_n - 10$ において $n = 3$ とすると $a_2 = a_3 - 10 = 49 - 10 = 39$,

$a_{n-1} = a_n - 10$ において $n = 2$ とすると $a_1 = a_2 - 10 = 39 - 10 = 29$,

$a_{n-1} = a_n - 10$ において $n = 1$ とすると $a_0 = a_1 - 10 = 29 - 10 = 19$.　$\boxed{\text{終}}$

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差を d とおきます. 漸化式 $a_n = a_{n-1} + d$ を用いて，自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \ldots$ を計算していくと，

$$a_{m+1} = a_m + d = a_m + d\ ,$$
$$a_{m+2} = a_{m+1} + d = (a_m + d) + d = a_m + 2d\ ,$$
$$a_{m+3} = a_{m+2} + d = (a_m + 2d) + d = a_m + 3d\ ,$$
$$a_{m+4} = a_{m+3} + d = (a_m + 3d) + d = a_m + 4d\ ,$$
$$a_{m+5} = a_{m+4} + d = (a_m + 4d) + d = a_m + 5d\ ,$$
$$\vdots \qquad .$$

このように，各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\ & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\ & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd \end{array} .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m + dk$ において $m + k = n$ とおきます； $k = n - m$ なので，
$a_n = a_m + d(n - m)$.

> **定理 1.4**　等差数列 $\{a_n\}$ の公差が d であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

この定理 1.4 より次のようになります：第 1 項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の公差が d であるとき，

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 + d(n - 1)\ ;$$

第 0 項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差が d であるとき，

$$\text{各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 + dn\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について公差は -3 であり $a_5 = 7$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差は -3 なので，

$$a_n = a_5 + (-3)(n - 5) = 7 - 3n + 15 = 22 - 3n\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.4.1}}$　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について公差は $-\dfrac{3}{2}$ であり $a_7 = 5$ とします. 正の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について $a_3 = 7$ かつ $a_8 = 27$ とする. 正の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の公差を d とおく. $a_8 = a_3 + d(8 - 3)$ なので，$5d = a_8 - a_3 = 27 - 7 = 20$, よって $d = 4$. 故に

$$a_n = a_3 + 4(n - 3) = 7 + 4n - 12 = 4n - 5\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.4.2}}$　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について $a_5 = 22$ かつ $a_{11} = 4$ とします. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について公差は 2 であり第 1 項は $a_1 = 5$ とする. 正の自然数 n に対して総和 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ を計算する.

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の公差が 2 なので，正の各自然数 k に対して

$$a_k = a_1 + 2(k - 1) = 5 + 2k - 2 = 2k + 3\ .$$

これより，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2k + 3) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3 = 2\frac{n(n+1)}{2} + 3n = n(n + 4)\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.4.3}}$　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について公差は 4 であり第 0 項は $a_0 = 5$ とします. 自然数 m に対して総和 $\sum\limits_{k=0}^{m} a_k$ を計算しなさい.