§1.5　等比数列

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = ra_{n-1} \qquad (\,r\ \text{は}\ n\ \text{と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を**等比数列**といい，定数 r をその**公比**といいます.

$\boxed{\text{例}}$　等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とします. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$\begin{aligned}
a_4 &= 2a_3 = 2\times 10 = 20\ ,\\
a_5 &= 2a_4 = 2\times 20 = 40\ ,\\
a_6 &= 2a_5 = 2\times 40 = 80\ ,\\
a_7 &= 2a_6 = 2\times 80 = 160\ ,\\
&\ \ \vdots\quad .
\end{aligned}$$

また，$a_{n-1} = \dfrac{a_n}{2}$ なので,

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5\ ,\\
a_1 &= \frac{a_2}{2} = \frac{5}{2}\ ,\\
a_0 &= \frac{a_1}{2} = \frac{5}{4}\ .
\end{aligned}\qquad \boxed{\text{終}}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比 r の等比数列とします. 漸化式 $a_n = ra_{n-1}$ を用いて，自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \ldots$ を計算していくと,

$$\begin{aligned}
a_{m+1} &= ra_m = a_m r^1\ ,\\
a_{m+2} &= ra_{m+1} = r(a_m r) = a_m r^2\ ,\\
a_{m+3} &= ra_{m+2} = r(a_m r^2) = a_m r^3\ ,\\
a_{m+4} &= ra_{m+3} = r(a_m r^3) = a_m r^4\ ,\\
a_{m+5} &= ra_{m+4} = r(a_m r^4) = a_m r^5\ ,\\
&\ \ \vdots\qquad .
\end{aligned}$$

このように，各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$ となります.

$$\begin{tikzcd}
a_m \arrow[r, "\times r"] & a_{m+1} \arrow[r, "\times r"] \arrow[d, equal] & a_{m+2} \arrow[r, "\times r"] \arrow[d, equal] & a_{m+3} \arrow[r, "\times r"] \arrow[d, equal] & a_{m+4} \arrow[r, "\times r"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "\times r"] & a_{m+k} \arrow[d, equal] \\
 & a_m r & a_m r^2 & a_m r^3 & a_m r^4 & \cdots & a_m r^k
\end{tikzcd}\ .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m r^k$ において $m+k = n$ とおきます; $k = n-m$ ですから，$a_n = a_m r^{n-m}$ となります.

> **定理** 1.5.1　数列 $\{a_n\}$ が公比 r の等比数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の任意の自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

自然数でない実数 x に対して，例えば $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^x$ のような，底が負の数で指数が x である冪は定義されていません（指数関数の底は正の実数に限られます）. しかし，数列 $\{a_n\}$ の独立変数 n の値は自然数に限られますから，$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ のような負の数を底とする冪の値があります：

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1\ ,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}\ ,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\ ,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}\ ,\ \cdots\ .$$

従って，例えば公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列 $\left\{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ ができます.

$\boxed{\text{例題}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比 2 の等比数列で，$a_5 = 28$ とする. 自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比 2 の等比数列なので,

$$a_n = a_5 2^{n-5} = 28\cdot 2^{n-5} = 7\cdot 2^2\cdot 2^{n-5} = 7\cdot 2^{n-3}\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 1.5.1}}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列で，$a_2 = 45$ とします. 自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり，$a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする. 自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので，$63 = 7r^4$, $r^4 = 9$, $r > 0$ なので

$$r = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}\ .$$

従って,

$$a_n = a_2 r^{n-2} = 7\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{n-2} = 7\cdot 3^{\frac{n}{2}-1}\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 1.5.2}}$　等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり，$a_3 = 4$, $a_{12} = 500$ とします. 自然数 n に対する項 a_n を n の式で表しなさい.

等比数列の項の総和の計算法を説明します.

$\boxed{\text{例解}}$　公比が 5 の等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n$$

を求めます. この値を S とおきます：

$$S = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n\ .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛けます：

$$\begin{aligned}
5S &= (2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n)\cdot 5\\
&= 2\cdot 5+10\cdot 5+50\cdot 5+250\cdot 5+1250\cdot 5+\cdots+2\cdot 5^{n-2}\cdot 5+2\cdot 5^{n-1}\cdot 5+2\cdot 5^n\cdot 5\\
&= 10+50+250+1250+6250+\cdots 2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n+2\cdot 5^{n+1}\ .
\end{aligned}$$

$5S$ から S を引くと次のように $10+50+250+1250+6250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n$ の部分が無くなります.

$$\begin{array}{rrcl}
 & 5S & = & \qquad 10+50+250+1250+6250+\quad\cdots\quad +2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n+2\cdot 5^{n+1}\\
-) & S & = & 2+10+50+250+1250+\ \cdots\ +2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n\\
\hline
 & 4S & = & -2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2\cdot 5^{n+1}
\end{array}$$

つまり $4S = -2+2\cdot 5^{n+1} = 2\cdot 5^{n+1}-2$ なので，$S = \dfrac{1}{2}(5^{n+1}-1)$. よって

$$\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n = \frac{1}{2}(5^{n+1}-1)\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{例題}}$　2 以上の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum\limits_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ を計算する.

〔解説〕 $S = \sum\limits_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n\ .$$

両辺に等比数列の公比 3 を掛ける：

$$3S = 5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+5\cdot 3^7+\cdots+5\cdot 3^n+5\cdot 3^{n+1}\ .$$

$3S$ から S を引く：

$$\begin{array}{rrcl}
 & 3S & = & \qquad\qquad 5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n+5\cdot 3^{n+1}\\
-) & S & = & 5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n\\
\hline
 & 2S & = & -5\cdot 3^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +5\cdot 3^{n+1}
\end{array}$$

つまり $2S = -5\cdot 3^2+5\cdot 3^{n+1} = 5\cdot 3^{n+1}-45$. よって $S = \dfrac{5\cdot 3^{n+1}-45}{2}$. 故に $\sum\limits_{k=0}^{n}(5\cdot 3^k) = \dfrac{5\cdot 3^{n+1}-45}{2}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.5.3}}$　3 以上の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum\limits_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ を計算しなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{3\left(\dfrac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

〔解説〕 $S = \sum\limits_{k=0}^{n}\left\{3\left(\dfrac{5}{7}\right)^k\right\}$ とおく：

$$S = 3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}+3\left(\frac{5}{7}\right)^n\ .$$

この等式の両辺に等比数列の公比 $\dfrac{5}{7}$ を掛ける：

$$\frac{5}{7}S = 3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+3\left(\frac{5}{7}\right)^4+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^n+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\ .$$

S から $\dfrac{5}{7}S$ を引く：

$$\begin{array}{rrcl}
 & S & = & 3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+3\left(\frac{5}{7}\right)^4+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^n\\
-) & \frac{5}{7}S & = & \quad 3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+3\left(\frac{5}{7}\right)^4+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^n+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\\
\hline
 & \frac{2}{7}S & = & 3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}
\end{array}$$

つまり $\dfrac{2}{7}S = 3-3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1}$. 両辺に $\dfrac{7}{2}$ を掛けて

$$S = 3\cdot\frac{7}{2}-3\cdot\frac{7}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = \frac{21}{2}-3\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{21}{2}-\frac{15}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^n\ .$$

つまり $\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{3\left(\dfrac{5}{7}\right)^k\right\} = \dfrac{21}{2}-\dfrac{15}{2}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n$.

$S = \sum\limits_{k=0}^{n}\left\{3\left(\dfrac{5}{7}\right)^k\right\}$ に公比 $\dfrac{5}{7}$ の逆数 $\dfrac{7}{5}$ を掛けてもよい.

$$\begin{aligned}
S &= 3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}+3\left(\frac{5}{7}\right)^n\ .\\
\frac{7}{5}S &= 3\cdot\frac{7}{5}+3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-2}+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}\ .
\end{aligned}$$

$\dfrac{7}{5}S$ から S を引く.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \frac{7}{5}S & = & 3\cdot\frac{7}{5}+3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}\\
-) & S & = & \qquad 3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}+3\left(\frac{5}{7}\right)^n\\
\hline
 & \frac{2}{5}S & = & 3\cdot\frac{7}{5} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -3\left(\frac{5}{7}\right)^n
\end{array}$$

つまり $\dfrac{2}{5}S = 3\cdot\dfrac{7}{5}-3\left(\dfrac{5}{7}\right)^n$. 両辺に $\dfrac{5}{2}$ を掛けて $S = \dfrac{21}{2}-\dfrac{15}{2}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n$. つまり $\sum\limits_{k=0}^{n}\left\{3\left(\dfrac{5}{7}\right)^k\right\} = \dfrac{21}{2}-\dfrac{15}{2}\left(\dfrac{5}{7}\right)^n$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.5.4}}$　正の自然数 n に対して総和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{4\left(\dfrac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算しなさい.

等比数列の項の総和について次の公式があります.

定理 1.5.2　正の自然数 n に対して，最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は，$r \neq 1$ のとき

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\ ,$$

$r = 1$ のとき

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} = an\ .$$

証明　$r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく：

$$S_n = a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}\ .$$

両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n\ .$$

S_n から rS_n を引くと,

$$\begin{aligned}
S_n-rS_n &= a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}\\
&\qquad -(ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n)\\
&= a-ar^n\ ,
\end{aligned}$$

よって $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ なので，$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$.

$r = 1$ のとき,

$$\begin{aligned}
a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} &= \underbrace{a+a+a+a+a+\cdots+a+a}_{n\,\text{個の}\,a\,\text{の和}}\\
&= an\ .
\end{aligned}$$

（証明終り）

$\boxed{\text{例}}$　正の自然数 n に対して，初項が 5 で 公比が 3 の等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和は

$$5+5\cdot 3+5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots+5\cdot 3^{n-1} = \frac{5(3^n-1)}{3-1} = \frac{5}{2}(3^n-1)\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数 n に対して総和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{4\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right\}$ を計算する.

総和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{4\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\right\}$ は初項が $4\left(\dfrac{3}{5}\right)^1 = \dfrac{12}{5}$ で公比が $\dfrac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \frac{\frac{12}{5}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{5}} = 6\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 1.5.5}}$　正の自然数 n に対して総和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{6\left(\dfrac{5}{3}\right)^n\right\}$ を計算しなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n$ を計算する.

〔解説〕 総和

$$\begin{aligned}
2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n &= 2+2\cdot 5^1+2\cdot 5^2+2\cdot 5^3+2\cdot 5^4+\cdots+2\cdot 5^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k)
\end{aligned}$$

は，第 0 項が 2 で公比が 5 である等比数列の第 0 項から第 n 項までの $(n+1)$ 個の項の総和なので,

$$2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n = \frac{2(5^{n+1}-1)}{5-1} = \frac{1}{2}(5^{n+1}-1)\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 1.5.6}}$　正の自然数 n に対して総和 $4+12+36+108+324+\cdots+4\cdot 3^n$ を計算しなさい.