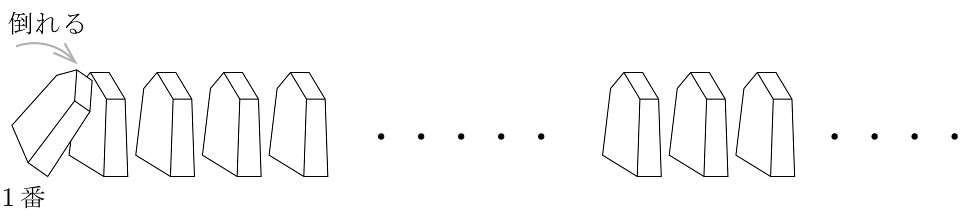
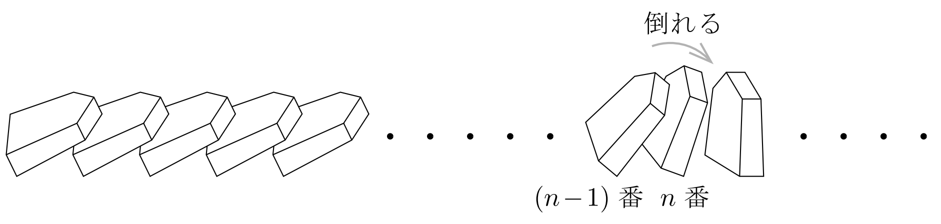
# §1.6　数学的帰納法

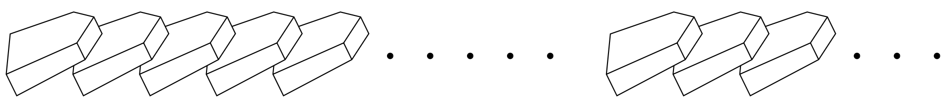
“将棋倒し”という言葉があります．将棋の駒を適当な間隔で一列に並べます．まず，1 番めの駒が倒れるとします．




このとき，2 番めの駒，3 番めの駒，4 番めの駒，$\cdots$ と順に倒れていきます．2 以上の自然数 $n$ について，$(n-1)$ 番めの駒が倒れると必ず $n$ 番めの駒も倒れるとします．




このとき，結局総ての駒が倒れます．



つまり，次の 2 つのことが成り立つとき総ての駒が倒れます：

(1)　1 番めの駒が倒れる；

(2)　2 以上の任意の自然数 $n$ について，$(n-1)$ 番めの駒が倒れると次の $n$ 番めの駒も倒れる．

数学においてこの将棋倒しに似た論法が使われます．

正の自然数 $n$ に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の 2 つのことが成り立つとします：

(1)　$\mathcal{P}(1)$ である；

(2)　2 以上の任意の自然数 $n$ について，$\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である．

この 2 つのことから，次のようにして，$\mathcal{P}(2)$ であること，$\mathcal{P}(3)$ であること，$\mathcal{P}(4)$ であること，などが導かれます．

$\mathcal{P}(1)$ である (条件 (1))　　$\mathcal{P}(1)$ ならば $\mathcal{P}(2)$ である (条件 (2))

この 2 つから

$\mathcal{P}(2)$ である　　$\mathcal{P}(2)$ ならば $\mathcal{P}(3)$ である (条件 (2))

この 2 つから

$\mathcal{P}(3)$ である　　$\mathcal{P}(3)$ ならば $\mathcal{P}(4)$ である (条件 (2))

この 2 つから

$\mathcal{P}(4)$ である

以下同様にして，$\mathcal{P}(5)$ であること，$\mathcal{P}(6)$ であること，などが導かれます．結局，任意の正の自然数 $n$ について $\mathcal{P}(n)$ であることになります．

このような推論法を**数学的帰納法**といいます．

**法則**（数学的帰納法）　正の自然数 $n$ に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の 2 つのことが成り立つとする：

(1)　$\mathcal{P}(1)$ である；

(2)　2 以上の任意の自然数 $n$ について，$\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である．

このとき，正の任意の自然数 $n$ について $\mathcal{P}(n)$ である．

$\boxed{例}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する：$a_1=1$ で，2 以上の任意の自然数 $n$ について $a_n=a_{n-1}+2n-1$ ．次のことを示す：正の任意の自然数 $n$ について $a_n=n^2$ ．

〔方針〕数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1)　等式 $a_n=n^2$ において $n=1$ とした等式 $a_1=1^2$ を示す；

(2)　2 以上の任意の自然数 $n$ について，漸化式 $a_n=a_{n-1}+2n-1$ を用いて，等式 $a_{n-1}=(n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n=n^2$ を導く．

〔解答〕

(1)　$a_1=1$ なので $a_1=1^2$ ．

(2)　2 以上の自然数 $n$ について，$a_n=a_{n-1}+2n-1$ なので，$a_{n-1}=(n-1)^2$ ならば

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1}+2n-1=(n-1)^2+2n-1=n^2-2n+1+2n-1 \\ &= n^2 \ . \end{aligned}$$

故に，数学的帰納法により，正の任意の自然数 $n$ について $a_n=n^2$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.6.1}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義します：$a_1=1$ で，2 以上の任意の自然数 $n$ について $a_n=a_{n-1}+3n^2-3n+1$ ．次のことを示しなさい：正の任意の自然数 $n$ について $a_n=n^3$ ．

$\boxed{問題\ 1.6.2}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義します：$a_1=4$ で，2 以上の任意の自然数 $n$ について $a_n=\dfrac{4a_{n-1}}{a_{n-1}+4}$ ．次のことを示しなさい：正の任意の自然数 $n$ について $a_n=\dfrac{4}{n}$ ．

自然数 $n$ に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，任意の自然数 $n$ について $\mathcal{P}(n)$ であることを示すためには，0 から数学的帰納法を始めます．

**法則**（数学的帰納法）　自然数 $n$ に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の 2 つのことが成り立つとする：

(1)　$\mathcal{P}(0)$ である；

(2)　正の任意の自然数 $n$ について，$\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である．

このとき，任意の自然数 $n$ について $\mathcal{P}(n)$ である．

1.4 節において次のことを述べました：第 0 項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差が $d$ であるとき，

$$任意の自然数\ n\ について\quad a_n=a_0+dn\ .$$

このことを数学的帰納法により証明します．

**証明**　第 0 項から始まる等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差が $d$ であるとする．

$d\cdot 0=0$ なので $a_0=a_0+d\cdot 0$ ．

正の任意の自然数 $n$ について，$a_n=a_{n-1}+d$ なので，$a_{n-1}=a_0+d(n-1)$ ならば

$$a_n=a_{n-1}+d=a_0+d(n-1)+d=a_0+dn\ .$$

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 $n$ について $a_n=a_0+dn$ ．

（証明終り）

1.5 節において次のことを述べました：第 0 項から始まる等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が $r$ であるとき，

$$任意の自然数\ n\ について\quad a_n=a_0r^n\ .$$

このことを数学的帰納法により証明します．

**証明**　第 0 項から始まる等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が $r$ であるとする．

$r^0=1$ なので $a_0=a_0r^0$ ．

正の任意の自然数 $n$ について，$a_n=a_{n-1}r$ なので，$a_{n-1}=a_0r^{n-1}$ ならば

$$a_n=a_{n-1}r=a_0r^{n-1}r=a_0r^n\ .$$

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 $n$ について $a_n=a_0r^n$ ．

（証明終り）

$\boxed{例題}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0=4$ で，正の任意の自然数 $n$ について $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 $n$ について $a_n>3$ ．

〔方針〕数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1)　不等式 $a_n>3$ において $n=0$ とした不等式 $a_0>3$ を示す；

(2)　正の任意の自然数 $n$ について，不等式 $a_{n-1}>3$ を仮定して不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6}>3$ を導き，漸化式 $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ により不等式 $a_n>3$ を導く．

〔解答〕

(1)　$a_0=4$ なので $a_0>3$ ．

(2)　正の自然数 $n$ について $a_{n-1}>3$ とする．

$$a_{n-1}+6>3+6=9\ ,$$
$$\sqrt{a_{n-1}+6}>\sqrt{9}=3\ ,$$

$a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ なので $a_n>3$ ．つまり，正の任意の自然数 $n$ について，$a_{n-1}>3$ ならば $a_n>3$ ．

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 $n$ に対して $a_n>3$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.6.3}$　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義します：$a_0=7$ で，正の任意の自然数 $n$ に対して $a_n=\sqrt{3a_{n-1}+10}$ ．次のことを示しなさい：任意の自然数 $n$ に対して $a_n>5$ ．

なお，数学的帰納法は帰納法ではなくて演繹法です．