§2.0　速度

物体が移動する速度について考えます.

$\boxed{\text{例}}$　物理実験によって次のことが知られています：物体が自由落下するとき，0以上の実数 t に対して，落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2\,\mathrm{m}$ である[1]．つまり，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおくと，$\varphi(t)=4.9t^2$ です.

物体が落下し始めてからの時間（単位は秒）に対する落下速度（単位は m/s）を考えます．ある時刻からある時刻までの時間における落下距離に対して落下の平均速度は次のようになります：

$$\text{落下の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}}\ .$$

例えば，落下開始3秒後から5秒後までの2秒間に，落下距離は $\varphi(3)=4.9\times 3^2=44.1$ から $\varphi(5)=4.9\times 5^2=122.5$ に変化します；この間の落下距離は $\varphi(5)-\varphi(3)$ ですから，この間の落下の平均速度は

$$\frac{\varphi(5)-\varphi(3)}{5-3} = \frac{122.5-44.1}{2} = 39.2\ .$$

このようにして，落下開始3秒後から t 秒後までの落下の平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ を計算してみます：

$$\begin{aligned}
\text{落下開始3秒後から3.1秒後までの平均速度は}\quad & \frac{\varphi(3.1)-\varphi(3)}{3.1-3}=29.89 \quad ;\\
\text{落下開始3秒後から3.01秒後までの平均速度は}\quad & \frac{\varphi(3.01)-\varphi(3)}{3.01-3}=29.449 \quad ;\\
\text{落下開始3秒後から3.001秒後までの平均速度は}\quad & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.001-3}=29.4049 \quad ;\\
\text{落下開始3秒後から3.0001秒後までの平均速度は}\quad & \frac{\varphi(3.001)-\varphi(3)}{3.0001-3}=29.40049 \quad ;\\
\text{落下開始3秒後から3.00001秒後までの平均速度は}\quad & \frac{\varphi(3.0001)-\varphi(3)}{3.00001-3}=29.400049 \quad ;\\
& \vdots \qquad\qquad .
\end{aligned}$$

このように，t の値を 3 に近づけていくと，落下開始3秒後から t 秒後までの平均速度 $\dfrac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3}$ は 29.4 に近づいていきます．t の値を 3 に近づけていくことは，3秒後から t 秒後までの時間を 0 に近づける，つまり瞬間に近づけることです．そこで，私達は，落下開始3秒後の瞬間の速度は $29.4\,\mathrm{m/s}$ であると考えます．つまり，落下開始3秒後の瞬間速度は，

$$\text{変数 } t \text{ の値を 3 に近づけるとき落下の平均速度 } \frac{\varphi(t)-\varphi(3)}{t-3} \text{ が近づく値}$$

です．この瞬間速度を単に速度といいます．　$\boxed{\text{終}}$

このように，“瞬間速度”の概念を数学的に定義するためには，“変数 t の値を定数 a に近づけるとき t の関数の値が近づく値”という概念が必要になります．このような概念を極限 (limit) といいます．極限は，これから学ぶ微分積分を支える大変に重要な概念です.

---

[1] 空気抵抗とかの細かいことは無視します.