§2.1　関数の極限

$\boxed{\text{例解}}$　2 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を次のように定めます：$\psi(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ （ $x\neq 2$ ）． 2 以外の任意の実数 x に対して $\psi(x)$ の値があるので， $x\neq 2$ として x の値を 2 に近づけていくときの $\psi(x)$ の値を考えることができます． x の値を 2 より大きい方から 2 に近づけていきます：

$$x=2.1 \text{ のとき } \quad \psi(x)=\frac{2.1^2+2.1-6}{2.1-2}=5.1\ ,$$
$$x=2.001 \text{ のとき } \quad \psi(x)=\frac{2.001^2+2.001-6}{2.001-2}=5.001\ ,$$
$$x=2.00001 \text{ のとき } \quad \psi(x)=\frac{2.00001^2+2.00001-6}{2.00001-2}=5.00001\ ,$$
$$\vdots\ .$$

x の値を 2 より小さい方から 2 に近づけていきます：

$$x=1.9 \text{ のとき } \quad \psi(x)=\frac{1.9^2+1.9-6}{1.9-2}=4.9\ ,$$
$$x=1.999 \text{ のとき } \quad \psi(x)=\frac{1.999^2+1.999-6}{1.999-2}=4.999\ ,$$
$$x=1.99999 \text{ のとき } \quad \psi(x)=\frac{1.99999^2+1.99999-6}{1.99999-2}=4.99999\ ,$$
$$\vdots\ .$$

つまり，変数 x の値を 2 に近づけていくと， $\psi(x)$ の値は 5 に近づいていきます． このようなとき， x の値を 2 に限りなく近づけるとき $\psi(x)$ は 5 に収束する，または， $x\to 2$ のとき $\psi(x)$ は 5 に収束するといい，5 を $\psi(x)$ の極限（値）といいます；この極限（値）を $\displaystyle\lim_{x\to 2}\psi(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x\to 2}\psi(x)=5\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

一般的に述べます． 関数 f 及び定数 a について， a を除く f の定義域の内で a に限りなく近づくことができて，

a を除く f の定義域の実数を表す変数 x の値を a に限りなく近づけると
f の値 $f(x)$ が唯一つの値 c に限りなく近づく

とき， x の値を a に限りなく近づけると $f(x)$ は c に**収束する** (converge)，または， $x\to a$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，次のように書き表します：

$$x\to a \text{ のとき } f(x)\to c\ .$$

$x\to a$ のとき $f(x)$ が定数 c に収束するとき， c を $f(x)$ の**極限（値）** (limit value) といい， $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ と書き表します： $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=c$ ．

関数 f の独立変数 x 及び定数 a について， $x\to a$ のとき，変数 x の値は f の定義域に属す a 以外の実数ですから， $x\neq a$ です．

関数の独立変数 x 及び定数 a について， $x\to a$ のとき $x\neq a$ ．

従って，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ は $f(a)$ と必ずしも関係ありません．

関数 f 及び定数 a について， $x\to a$ のとき $f(x)$ がどんな定数にも収束しないとき， $x\to a$ のとき $f(x)$ は**発散する**といいます． つまり次のようになります：

収束する ＝ 極限値がある ；
発散する ＝ 収束しない ＝ 極限値がない ．

$x\to a$ のとき $f(x)$ が発散するとき，極限を表す式 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ の値はありません．

$\boxed{\text{例}}$　0 以外の実数全体を定義域とする関数 f と g とを次のように定めます：

$$f(x)=x\sin\frac{3}{x}\quad(\ x\neq 0\ )\ ,\qquad g(x)=\sin\frac{3}{x}\quad(\ x\neq 0\ )\ .$$

変数 x について $x\to 0$ のときの $f(x),g(x)$ の極限を調べます． 試しに 0 に近い実数 x の値を幾つかに対して $f(x),g(x)$ の値を計算すると次の表のようになります．

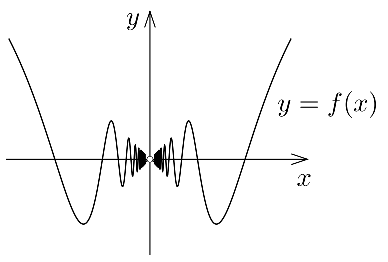
x の値	$f(x)$ の値	$g(x)$ の値
0.89201	$-0.196054\cdots$	$-0.219789\cdots$
0.06059	$-0.041405\cdots$	$-0.683364\cdots$
0.00374	$-0.003211\cdots$	$-0.858793\cdots$
0.00027	$0.000174\cdots$	$0.645825\cdots$
0.00006	$-0.000059\cdots$	$-0.999840\cdots$

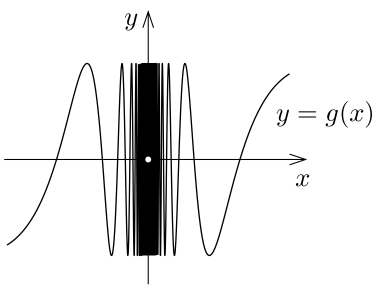
x の値	$f(x)$ の値	$g(x)$ の値
-0.76031	$-0.547615\cdots$	$0.720252\cdots$
-0.05289	$0.009095\cdots$	$-0.171970\cdots$
-0.00214	$0.001409\cdots$	$-0.658508\cdots$
-0.00063	$-0.000429\cdots$	$0.681419\cdots$
-0.00008	$0.000074\cdots$	$-0.928927\cdots$

これらの表から見当が付くように次のようになります：

$x\to 0$ のとき $f(x)$ は 0 に収束する，つまり $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=0$ ；
$x\to 0$ のとき $g(x)$ は収束しない（発散する）．

関数 f のグラフと g のグラフとを比較して下さい．





$\boxed{\text{終}}$