

## § 2.1 関数の極限

**例解** 2 以外の実数の全体を定義域とする関数  $\psi$  を次のように定めます：

$$\psi(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \quad (x \neq 2) .$$

2 以外の任意の実数  $x$  に対して  $\psi(x)$  の値があるので、 $x \neq 2$  として  $x$  の値を 2 に近づけていくときの  $\psi(x)$  の値を考えることができます。  $x$  の値を 2 より大きい方から 2 に近づけていきます：

$$x = 2.1 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{2.1^2 + 2.1 - 6}{2.1 - 2} = 5.1 ,$$

$$x = 2.001 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{2.001^2 + 2.001 - 6}{2.001 - 2} = 5.001 ,$$

$$x = 2.00001 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{2.00001^2 + 2.00001 - 6}{2.00001 - 2} = 5.00001 ,$$

⋮

$x$  の値を 2 より小さい方から 2 に近づけていきます：

$$x = 1.9 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{1.9^2 + 1.9 - 6}{1.9 - 2} = 4.9 ,$$

$$x = 1.999 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{1.999^2 + 1.999 - 6}{1.999 - 2} = 4.999 ,$$

$$x = 1.99999 \text{ のとき } \psi(x) = \frac{1.99999^2 + 1.99999 - 6}{1.99999 - 2} = 4.99999 ,$$

⋮

つまり、変数  $x$  の値を 2 に近づけていくと、 $\psi(x)$  の値は 5 に近づいていきます。このようなとき、 $x$  の値を 2 に限りなく近づけると  $\psi(x)$  は 5 に収束する、または、 $x \rightarrow 2$  のとき  $\psi(x)$  は 5 に収束するといひ、5 を  $\psi(x)$  の極限(値)といひます；この極限(値)を  $\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x)$  と書き表します：

$$\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x) = 5 .$$

終

一般的に述べます。関数  $f$  及び定数  $a$  について、 $a$  を除く  $f$  の定義域の中で  $a$  に限りなく近づけることができ、

$a$  を除く  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの値  $c$  に限りなく近づくと

とき、 $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  $f(x)$  は  $c$  に**収束する**(converge)、または、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、次のように書き表します：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が定数  $c$  に収束するとき、 $c$  を  $f(x)$  の**極限(値)**(limit value)といひ、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  と書き表します： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  .

関数  $f$  の独立変数  $x$  及び定数  $a$  について、 $x \rightarrow a$  のとき、変数  $x$  の値は  $f$  の定義域に属す  $a$  以外の実数ですから、 $x \neq a$  です。

関数の独立変数  $x$  及び定数  $a$  について、 $x \rightarrow a$  のとき  $x \neq a$  .

従って、極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  は  $f(a)$  と必ずしも関係ありません。

関数  $f$  及び定数  $a$  について、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  がどんな定数にも収束しないとき、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は**発散する**といひます。つまり次のようになります：

収束する = 極限值がある；

発散する = 収束しない = 極限值がない。

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が発散するとき、極限を表す式  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  の値はありません。

**例** 0 以外の実数全体を定義域とする関数  $f$  と  $g$  とを次のように定めます：

$$f(x) = x \sin \frac{3}{x} \quad (x \neq 0) , \quad g(x) = \sin \frac{3}{x} \quad (x \neq 0) .$$

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $f(x), g(x)$  の極限を調べます。試しに 0 に近い実数  $x$  の値を幾つかに対して  $f(x), g(x)$  の値を計算すると次の表のようになります。

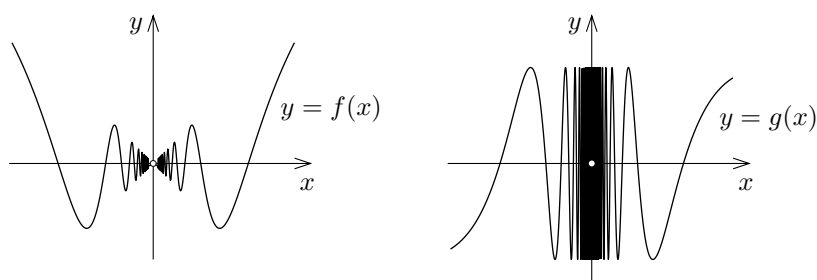
x の値	f(x) の値	g(x) の値	x の値	f(x) の値	g(x) の値
0.89201	-0.196054...	-0.219789...	-0.76031	-0.547615...	0.720252...
0.06059	-0.041405...	-0.683364...	-0.05289	0.009095...	-0.171970...
0.00374	-0.003211...	-0.858793...	-0.00214	0.001409...	-0.658508...
0.00027	0.000174...	0.645825...	-0.00063	-0.000429...	0.681419...
0.00006	-0.000059...	-0.999840...	-0.00008	0.000074...	-0.928927...

これらの表から見当が付くように次のようになります：

$x \rightarrow 0$  のとき  $f(x)$  は 0 に収束する、つまり  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  ；

$x \rightarrow 0$  のとき  $g(x)$  は収束しない(発散する)。

関数  $f$  のグラフと  $g$  のグラフとを比較して下さい。



終