

## § 2.2 関数の連続性

**例解** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = x^2$  と定めます。この関数  $\varphi(x)$  について、 $x \rightarrow 3$  の極限がどうなるか考えます。 $x$  の値を 3 より大きい方から 3 に近づけていきます：

$$\begin{aligned} x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) &= 3.1^2 = 9.61, \\ x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) &= 3.001^2 = 9.006001, \\ x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) &= 3.00001^2 = 9.0000600001, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$x$  の値を 3 より小さい方から 3 に近づけていきます：

$$\begin{aligned} x = 2.9 \text{ のとき } \varphi(x) &= 2.9^2 = 8.41, \\ x = 2.999 \text{ のとき } \varphi(x) &= 2.999^2 = 8.994001, \\ x = 2.99999 \text{ のとき } \varphi(x) &= 2.99999^2 = 8.9999400001, \\ &\vdots \end{aligned}$$

このように、 $x \rightarrow 3$  のとき  $\varphi(x)$  は 9 に収束します： $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = 9$ 。この極限值 9 は  $\varphi(3)$  の値です： $\varphi(3) = 3^2 = 9$ 。従って  $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = \varphi(3)$  となります。 終

関数  $f$  と実数  $a$  について、 $f(a)$  の値があるとき、つまり  $a$  が関数  $f$  の定義域に属するとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  となるのが普通です。このようなとき、 $a$  において  $f$  は**連続** (continuous) であるといえます。

**定義** 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  において  $f$  が連続であるとは、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が収束して  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  となることである。

区間  $I$  において関数  $f$  が連続であるとは、 $I$  の各実数において  $f$  が連続であることである。

関数  $f$  が連続であるとは、 $f$  が定義域の任意の実数において連続であることである。

証明は省略しますが、これまで私達が扱ってきた関数のほとんどは連続です。

**定理 2.2.1** 定数関数<sup>2)</sup> は連続である。

**例** 定数関は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow 3} 7 = 7, \quad \lim_{x \rightarrow -5} \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \sin 2 = \sin 2. \quad \text{終}$$

**定理 2.2.2** 冪関数は連続である。

**例** 冪関数  $x^3$  及び  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = (-2)^3 = -8, \quad \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x} = \sqrt{7}. \quad \text{終}$$

**定理 2.2.3** 指数関数及び対数関数は連続である。

**例** 指数関数  $2^x$  及び対数関数  $\log_3 x$  は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow 5} 2^x = 2^5 = 32, \quad \lim_{x \rightarrow 8} \log_3 x = \log_3 8. \quad \text{終}$$

**定理 2.2.4** 三角関数及び逆三角関数は連続である。

**例** 正弦関数  $\sin x$  及び余弦関数  $\cos x$  は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin x = \sin 2, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{終}$$

逆正弦関数  $\sin^{-1} x$  及び逆正接関数  $\tan^{-1} x$  は連続ですから、

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow 6} \tan^{-1} x = \tan^{-1} 6. \quad \text{終}$$

このように、“通常”関数  $f$  は定義域の  $a$  において連続ですから、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  です；このとき、極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  は結局  $f(x)$  の  $x$  に  $a$  を代入した値  $f(a)$  ですから、わざわざ極限値を考える意味がありません。しかし、前節で述べた関数  $\psi(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$  ( $x \neq 2$ ) のように、 $\psi(2)$  の値が無いときに極限值  $\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x)$  を考えることが必要になることがあります。

<sup>2)</sup> 定義域の任意の  $x$  に対して  $f(x) = k$  ( $k$  は  $x$  と無関係な定数) となる関数を定数関数といたしました。