§2.3　関数の極限の性質

関数の極限に関する定理をいくつか述べます．それらの証明は省略します．

定理 2.3.1　関数 f と g 及び定数 a について，$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad （複号同順），$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} .$$

例　変数 x について $x \to 2$ のときの x^4+3^x の極限値を調べます．冪関数 x^4 及び指数関数 3^x は連続ですから，

$$\lim_{x\to 2} x^4 = 2^4 = 16 , \qquad \lim_{x\to 2} 3^x = 3^2 = 9 .$$

よって，定理 2.3.1 より，

$$\lim_{x\to 2}(x^4+3^x) = \lim_{x\to 2} x^4 + \lim_{x\to 2} 3^x = 16+9 = 25 .$$

終

例　変数 x について $x \to 5$ のときの $x^2\log_3 x$ の極限値を調べます．冪関数 x^2 及び対数関数 $\log_3 x$ は連続ですから，

$$\lim_{x\to 5} x^2 = 5^2 = 25 , \qquad \lim_{x\to 5}\log_3 x = \log_3 5 .$$

よって，定理 2.3.1 より，

$$\lim_{x\to 5}(x^2\log_3 x) = \left(\lim_{x\to 5} x^2\right)\left(\lim_{x\to 5}\log_3 x\right) = 25\log_3 5 .$$

終

定理 2.3.1 より，例えば次のことが導かれます：変数 x と無関係な定数 a, k について，$\lim_{x\to a} k = k$ なので，関数 f について $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+k\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} + \lim_{x\to a} k = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} + k ,$$

$$\lim_{x\to a}\{kf(x)\} = \left(\lim_{x\to a} k\right)\lim_{x\to a} f(x) = k\lim_{x\to a} f(x) .$$

例解　変数 x について $x \to 3$ のときの $2x^2-5x+4$ の極限を調べます．冪関数 x^2，$x = x^1$ は連続ですから，

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9 , \qquad \lim_{x\to 3} x = 3 .$$

よって

$$\lim_{x\to 3}(2x^2) = 2\lim_{x\to 3} x^2 = 2\cdot 9 = 18 , \qquad \lim_{x\to 3}(5x) = 5\lim_{x\to 3} x = 5\cdot 3 = 15 .$$

従って

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4) = \lim_{x\to 3}(2x^2) - \lim_{x\to 3}(5x) - \lim_{x\to 3} 4 = 18-15+4 = 7 .$$

このように，本来は，極限値 $\lim_{x\to 3} x^2$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 3}(2x^2)$ を調べ，極限値 $\lim_{x\to 3} x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 3}(5x)$ を調べ，それから極限値 $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)$ を調べなければなりません．しかしそのような記述を略して単に次のように計算することがあります：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4) &= \lim_{x\to 3}(2x^2) - \lim_{x\to 3}(5x) + 4 = 2\lim_{x\to 3} x^2 - 5\lim_{x\to 3} x + 4 \\ &= 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 + 4 = 7 .\end{aligned}$$

終

例解　変数 x について $x \to \frac{\pi}{3}$ のときの $\dfrac{5\sin x}{\cos x + 2}$ の極限を調べます．三角関数 $\sin x$，$\cos x$ は連続ですから，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} , \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} .$$

よって，

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x) = 5\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x = 5\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x + 2) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} .$$

故に

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{5\sin x}{\cos x + 2} = \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x + 2)} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \sqrt{3} .$$

このように，本来は，極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)$ を調べ，極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x + 2)$ を調べ，それから極限値 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{5\sin x}{\cos x + 2}$ を調べなければなりません．しかしそのような記述を略して単に次のように計算することがあります：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{5\sin x}{\cos x + 2} &= \frac{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(5\sin x)}{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\cos x + 2)} = \frac{5\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x}{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x + 2} = \frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+2} \\ &= \sqrt{3} .\end{aligned}$$

終

問題 2.3.1　変数 x について $x \to \frac{\pi}{6}$ のときの $\dfrac{\sin x}{3} - \sqrt{3}\cos x$ の極限を調べなさい．

問題 2.3.2　変数 x について $x \to \sqrt{7}$ のときの $(x^2+1)\log_7 x$ の極限を調べなさい．

定理 2.3.2　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする．定数 a に対して，$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) .$$

例解　変数 x について $x \to 3$ のときの $\log_2(x^2+4)$ の極限値を調べます．冪関数 x^2 は連続ですから $\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$，よって $\lim_{x\to 3}(x^2+4) = \lim_{x\to 3} x^2 + 4 = 9+4 = 13$．対数関数 $\log_2 x$ は 13 において連続ですから，定理 2.3.2 より，

$$\lim_{x\to 3}\log_2(x^2+4) = \log_2\left\{\lim_{x\to 3}(x^2+4)\right\} = \log_2 13 .$$

このように，本来は，まず極限値 $\lim_{x\to 3} x^2$ を調べ，次に極限値 $\lim_{x\to 4}(x^2+4)$ を調べ，それから極限値 $\lim_{x\to 4}\log_2(x^2+4)$ を調べなければなりません．しかしそのような記述を略して次のように計算することがあります:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\log_2(x^2+4) &= \log_2\left\{\lim_{x\to 3}(x^2+4)\right\} = \log_2\left\{\lim_{x\to 3}(x^2+4)\right\} = \log_2(9+4) \\ &= \log_2 13 .\end{aligned}$$

終

例解　変数 x について $x \to 4$ のときの $\sqrt{3x-8}$ の極限値を調べます．まず，$\lim_{x\to 4}(3x-8) = 3\cdot 4 - 8 = 4$．冪関数 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ は 4 で連続ですから，

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-8} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(3x-8)} = \sqrt{4} = 2 .$$

このように，本来は，まず極限値 $\lim_{x\to 4}(3x-8)$ を調べてから極限値 $\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-8}$ を調べなければなりません．しかしそのような記述を略して次のように計算することがあります:

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{3x-8} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(3x-8)} = \sqrt{3\cdot 4 - 8} = \sqrt{4} = 2 .$$

終

問題 2.3.3　変数 x について $t \to \frac{3}{2}$ のときの $\cos\dfrac{\pi t^2}{3}$ の極限を調べなさい．

問題 2.3.4　変数 y について $y \to -1$ のときの $\tan^{-1}\sqrt{2y+5}$ の極限を調べなさい．

定理 2.3.3　変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x) = g(y)$ で，定数 a と b とについて $x \to a$ のとき $y \to b$，$y \neq b$ とする．$y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y) .$$

つまり，大雑把にいうと，変数 x と y とについて，$x \to a$ のとき $y \to b$ であるならば，$\lim_{x\to a}$ を $\lim_{y\to b}$ で置き換えることができます．