§2.4　関数の極限の計算

前節で扱った極限値は，結局は実数 a における関数 f の連続性 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ を用いて計算しました．しかしこれだけでは計算できないときもあります；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味があります．

$\boxed{\text{例解}}$　変数 x について $x\to 3$ のときの $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ の極限を考えます． $\lim_{x\to 3}(x-3)=3-3=0$ ですから， $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim_{x\to 3}(x-3)}$ と変形できません．そこで以下のように計算します．

x^2-9 を因数分解すると $x^2-9=(x+3)(x-3)$ ． $x\to 3$ のとき， $x\neq 3$ つまり $x-3\neq 0$ ですから [3]，

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3\ .$$

従って

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

この技法は覚えておいて下さい： x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ を求めるために，分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ を $x-a$ で約す [4]．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 1$ のときの $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$ の極限値を調べる：

$x\to 1$ のとき， $x\neq 1$ より $x-1\neq 0$ なので，

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{x+4}{x-3}\ .$$

従って

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 1}(x+4)}{\lim_{x\to 1}(x-3)}=\frac{1+4}{1-3}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

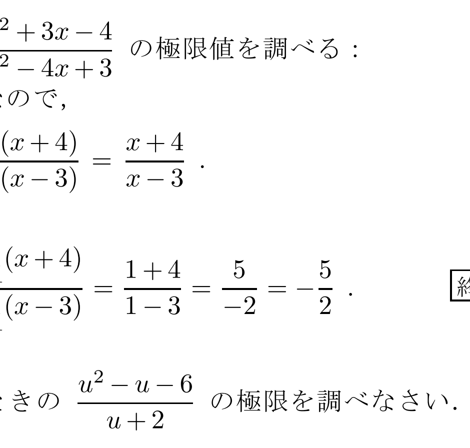
$\boxed{\text{問題 2.4.1}}$　変数 u について $u\to -2$ のときの $\dfrac{u^2-u-6}{u+2}$ の極限を調べなさい．

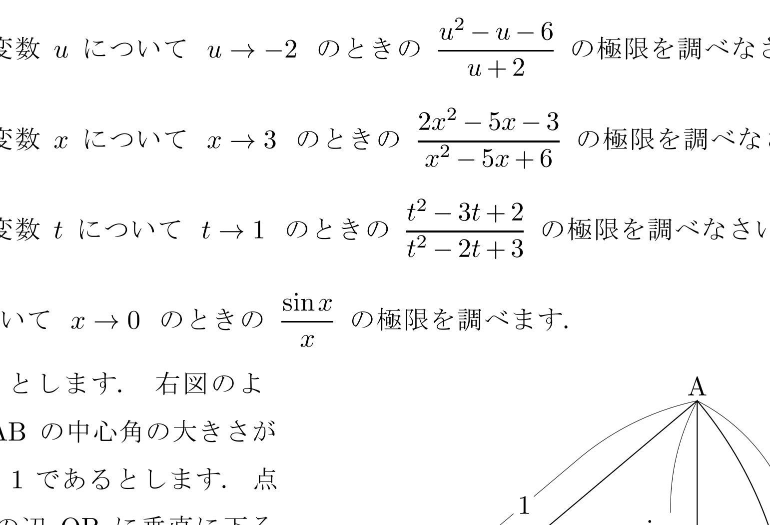
$\boxed{\text{問題 2.4.2}}$　変数 x について $x\to 3$ のときの $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 2.4.3}}$　変数 t について $t\to 1$ のときの $\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3}$ の極限を調べなさい．

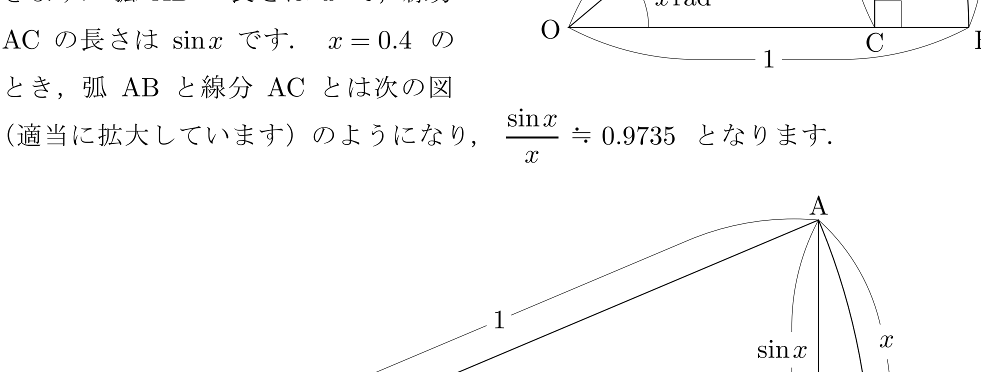
変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べます．

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とします．右図のように，扇形 OAB の中心角の大きさが $x$rad で半径が 1 であるとします．点 A から向かいの辺 OB に垂直に下ろした垂線と辺 OB との交点を C とおきます．弧 AB の長さは x で，線分 AC の長さは $\sin x$ です． $x=0.4$ のとき，弧 AB と線分 AC とは次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\sin x}{x}\fallingdotseq 0.9735$ となります．

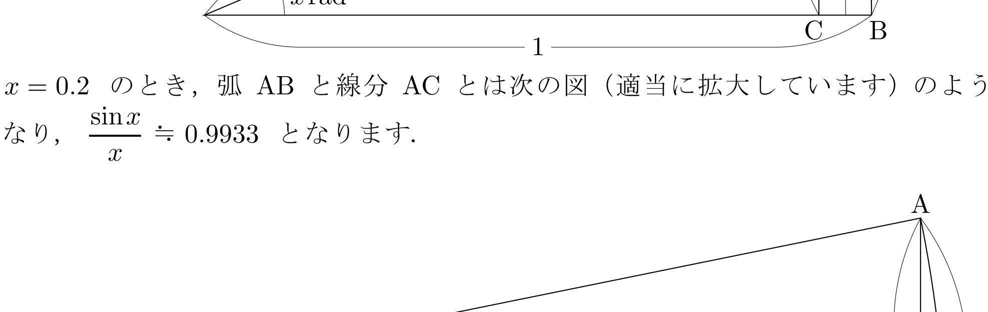




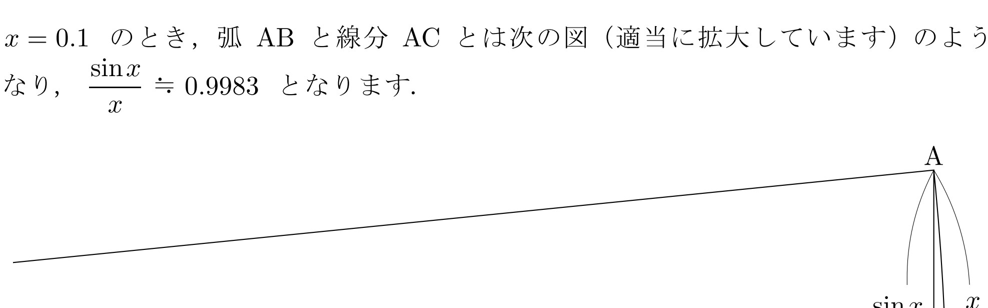
$x=0.2$ のとき，弧 AB と線分 AC とは次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\sin x}{x}\fallingdotseq 0.9933$ となります．



$x=0.1$ のとき，弧 AB と線分 AC とは次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\sin x}{x}\fallingdotseq 0.9983$ となります．



$x=0.05$ のとき，弧 AB と線分 AC とは次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\sin x}{x}\fallingdotseq 0.9996$ となります．



このように， x の値を 0 に近づけると，弧 AB の長さ x に対する線分 AC の長さ $\sin x$ の比率 $\dfrac{\sin x}{x}$ は 1 に近づきます．このようにして次の定理が成り立ちます．その証明は後にします．

> **定理** 2.4　変数 x について $x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は 1 に収束する：
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\sin 2x}{x}$ の極限値を調べる．

〔解説〕 $y=2x$ とおく． $x=\dfrac{y}{2}$ なので，

$$\frac{\sin 2x}{x}=\frac{\sin y}{\frac{y}{2}}=2\frac{\sin y}{y}\ .$$

$x\to 0$ のとき $y=2x\to 0$ なので，定理 2.3.3 より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(2\frac{\sin y}{y}\right)\ .$$

定理 2.4 より $\lim_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(2\frac{\sin y}{y}\right)=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.4.4}}$　変数 t について $t\to 0$ のときの $\dfrac{\sin\frac{t}{3}}{t}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 2.4.5}}$　変数 y について $y\to 0$ のときの $\dfrac{\sin(y+\pi)}{y}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\tan 3x}{x}$ の極限値を調べる．

〔解説〕

$$\frac{\tan 3x}{x}=\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x}=\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}\ .$$

$y=3x$ とおく． $x=\dfrac{y}{3}$ なので，

$$\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 3x}=\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}\cdot\frac{1}{\cos y}=\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{3}{\cos y}\ .$$

$x\to 0$ のとき $y=3x\to 0$ ．定理 2.4 より

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\ .$$

関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{y\to 0}\cos y=1$ ，よって

$$\lim_{y\to 0}\frac{3}{\cos y}=\frac{3}{\lim_{y\to 0}\cos y}=\frac{3}{1}=3\ .$$

故に

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{3}{\cos y}\right)=1\cdot 3=3\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.4.6}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\tan\frac{x}{5}}{x}$ の極限を調べなさい．

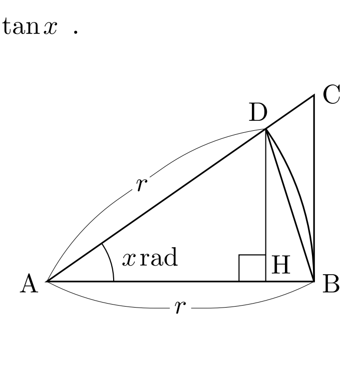
——— 定理 2.4 の証明

定理 2.4 を証明します．まず，次の定理を思い出して下さい：扇形の半径が r で中心角の大きさが θrad であるとき，その扇形の面積は $\dfrac{1}{2}\theta r^2$ である．このことを用いて次の定理を示します．

定理　$0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$ となる実数 x について $\sin x\leq x\leq\tan x$ ．

証明　$\angle$BAC の大きさが $x$rad で $\angle$ABC が直角である直角三角形 ABC を作る．辺 AC 上に $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}$ となる点 D をとり，点 D から直線 AB に下ろした垂線の足を H とおく． $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}=r$ とおく．このとき，

$$\overline{\mathrm{DH}}=r\sin x\ ,\qquad \overline{\mathrm{CB}}=r\tan x\ .$$



三角形 ABC の面積と，三角形 ABD の面積と，弧 BD を持つ扇形 ABD の面積とを比べると，

$$\text{三角形 ABD の面積}\leq\text{扇形 ABD の面積}\leq\text{三角形 ABC の面積}\ .$$

辺 AB を底辺とするとき三角形 ABD の高さは $\overline{\mathrm{DH}}=r\sin x$ なので，三角形 ABD の面積は $\dfrac{1}{2}r^2\sin x$ ．半径が r で中心角の大きさが $x$rad の扇形 ABD の面積は $\dfrac{1}{2}r^2 x$ ．辺 AB を底辺とするとき三角形 ABC の高さは $\overline{\mathrm{CB}}=r\tan x$ なので，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}r^2\tan x$ ．従って

$$\frac{1}{2}r^2\sin x\leq\frac{1}{2}r^2 x\leq\frac{1}{2}r^2\tan x\ .$$

この不等式の各辺を $\dfrac{1}{2}r^2$ で割ると $\sin x\leq x\leq\tan x$ ．　（証明終り）

関数 f,g,h について，実数 b に近い各実数 x について $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ とします． $x\to b$ のとき $f(x),g(x),h(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to b}f(x)\leq\lim_{x\to b}g(x)\leq\lim_{x\to b}h(x)\ ;$$

更に $\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{x\to b}h(x)=k$ ならば， $k\leq\lim_{x\to b}g(x)\leq k$ なので $\lim_{x\to b}g(x)=k$ ．

より精密に議論すると次の定理が導かれます．

定理（挟みうちの定理）　関数 f,g,h 及び実数 a,b,c について， $a<b<c$ で， $a<x<c$ かつ $x\neq b$ である各実数 x について $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ とする． $x\to b$ のとき $f(x)$ と $h(x)$ とが収束して $\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{x\to b}h(x)=k$ ならば， $x\to b$ のとき $g(x)$ も収束して $\lim_{x\to b}g(x)=k$ ．

これらの 2 つの定理を用いて定理 2.4 を証明します．

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ ， $x\neq 0$ とします． $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ です．

まず $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のときを考えます．先に述べた定理より $\sin x\leq x\leq\tan x$ なので，

$$\sin x\leq x\ \text{かつ}\ x\leq\frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

$x>0$ ， $\cos x>0$ なので， $x\leq\dfrac{\sin x}{\cos x}$ より $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}$ ， $\sin x\leq x$ より $\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．従って， $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のときは， $0<-x<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\cos(-x)\leq\frac{\sin(-x)}{-x}\leq 1\ ,$$

$\cos(-x)=\cos x$ ， $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$ なので $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．

このように， $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のときも $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のときも $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ；つまり， $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ ， $x\neq 0$ のとき，

$$\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1\ .$$

ここで $x\to 0$ とします． $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$ ， $\lim_{x\to 0}1=1$ なので，挟みうちの定理より， $x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は収束して $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ．

---

3) $x-3=0$ のとき，等式 $\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$ は左辺の値がないので成り立ちません．

4) x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，因数定理より， $x-a$ は $A(x)$ と $B(x)$ との両方の因数です；従って分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ は $x-a$ で約分できます．