§2.4　関数の極限の計算

前節で扱った極限値は，結局は実数 a における関数 f の連続性 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ を用いて計算しました．しかしこれだけでは計算できないときもあります；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味があります．

$\boxed{\text{例解}}$　変数 x について $x\to 3$ のときの $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ の極限を考えます．

$\lim_{x\to 3}(x-3)=3-3=0$ ですから， $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ を $\dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim_{x\to 3}(x-3)}$ に変形できません．そこで以下のように計算します．

x^2-9 を因数分解すると $x^2-9=(x+3)(x-3)$ ． $x\to 3$ のとき， $x\neq 3$ つまり $x-3\neq 0$ ですから [4]，

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3\ .$$

従って

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

このように，変数 x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，極限値 $\lim_{x\to a}\dfrac{A(x)}{B(x)}$ を求めるために，分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ を $x-a$ で約分します [5]．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 1$ のときの $\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$ の極限を調べる：

$x\to 1$ のとき， $x\neq 1$ より $x-1\neq 0$ なので，

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)}=\frac{x+4}{x-3}\ .$$

従って

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-3}=\frac{\lim_{x\to 1}(x+4)}{\lim_{x\to 1}(x-3)}=\frac{1+4}{1-3}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

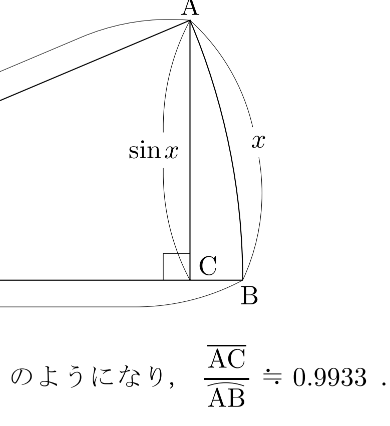
$\boxed{\text{問題 2.4.1}}$　変数 u について $u\to -2$ のときの $\dfrac{u^2-u-6}{u+2}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 2.4.2}}$　変数 x について $x\to 3$ のときの $\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 2.4.3}}$　変数 t について $t\to 1$ のときの $\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3}$ の極限を調べなさい．

変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限を調べます．

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とします．右下図のように，点 $\mathrm{O,A,B}$ を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり中心角 AOB の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であるとします．点 C は線分 OB に属し，直線 OB と直線 AC とは垂直であるとします．弧 AB の長さ $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 及び線分 AC の長さ $\overline{\mathrm{AC}}$ は次のようになります：

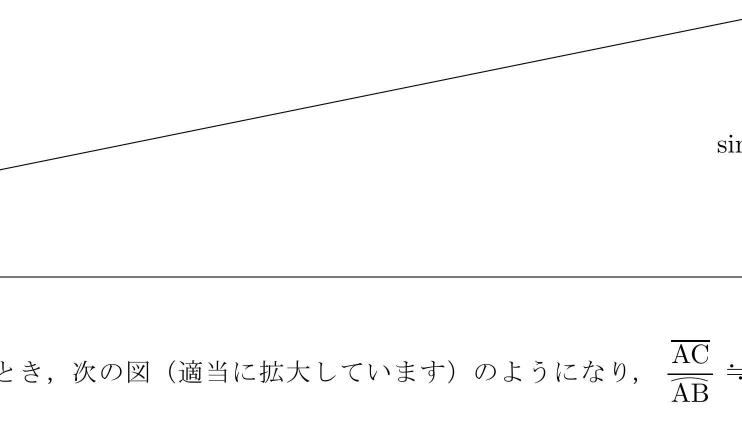


$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=x\ ,\qquad \overline{\mathrm{AC}}=\sin x\ .$$

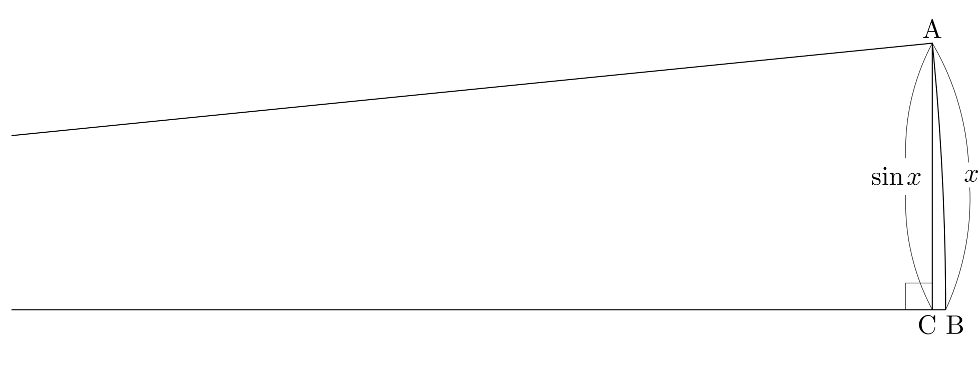
よって

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}=\frac{\sin x}{x}\ .$$

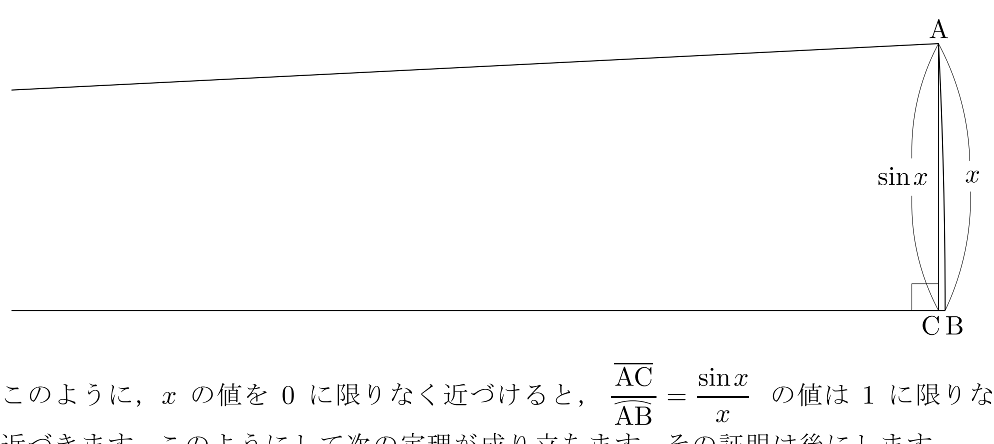
$x=0.4$ のとき，次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9735$ ．



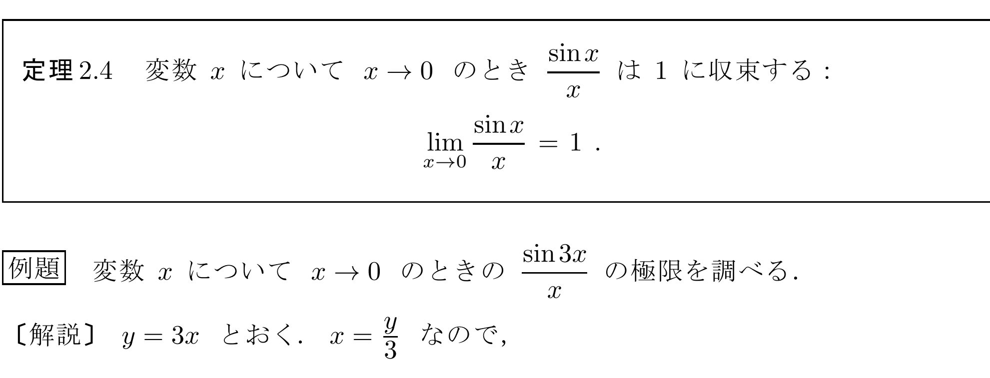
$x=0.2$ のとき，次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9933$ ．



$x=0.1$ のとき，次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9983$ ．



$x=0.05$ のとき，次の図（適当に拡大しています）のようになり， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}\fallingdotseq 0.9996$ ．



このように， x の値を 0 に限りなく近づけると， $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}=\dfrac{\sin x}{x}$ の値は 1 に限りなく近づきます．このようにして次の定理が成り立ちます．その証明は後にします．

> **定理 2.4**　変数 x について $x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は 1 に収束する：
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\sin 3x}{x}$ の極限を調べる．

〔解説〕 $y=3x$ とおく． $x=\dfrac{y}{3}$ なので，

$$\frac{\sin 3x}{x}=\frac{\sin y}{\frac{y}{3}}=3\cdot\frac{\sin y}{y}\ .$$

$x\to 0$ のとき $y=3x\to 0$ なので，定理 2.3.3 より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin y}{y}\right)\ .$$

定理 2.4 より $\lim_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(3\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3\cdot 1=3\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 2.4.4}}$　変数 t について $t\to 0$ のときの $\dfrac{\sin\frac{t}{4}}{t}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{\text{問題 2.4.5}}$　変数 y について $y\to \pi$ のときの $\dfrac{\sin y}{y-\pi}$ の極限を調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\tan 5x}{x}$ の極限を調べる．

〔解説〕 $y=5x$ とおく． $x=\dfrac{y}{5}$ ．

$$\frac{\tan 5x}{x}=\frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x}=\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=\frac{\sin y}{\frac{y}{5}}\cdot\frac{1}{\cos y}=\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{5}{\cos y}\ .$$

$x\to 0$ のとき $y=5x\to 0$ ．定理 2.4 より

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1\ .$$

関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{y\to 0}\cos y=1$ ，よって

$$\lim_{y\to 0}\frac{5}{\cos y}=\frac{5}{\lim_{y\to 0}\cos y}=\frac{5}{1}=5\ .$$

故に

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{x}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{5}{\cos y}\right)=1\cdot 5=5\ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

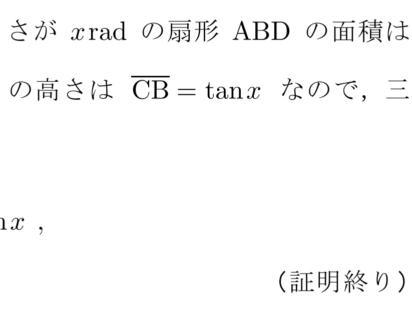
$\boxed{\text{問題 2.4.6}}$　変数 x について $x\to 0$ のときの $\dfrac{\tan\frac{x}{3}}{x}$ の極限を調べなさい．

——— 定理 2.4 の証明

“三角形で囲まれる領域の面積”を単に“三角形の面積”と略し，“扇形で囲まれる領域の面積”を単に”扇形の面積”と略します．次の定理がありました：正の実数 r,t について，扇形の半径が r であり中心角の弧度法による大きさが $t\,\mathrm{rad}$ であるとき，その扇形の面積は $\dfrac{1}{2}r^2t$ である．

定理　$0\leq x<\dfrac{\pi}{2}$ である各実数 x について $\sin x\leq x\leq\tan x$ ．

証明　実数 x について $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする．点 $\mathrm{A,B,C}$ を頂点とする三角形 ABC において，角 BAC の弧度法による大きさが $x\,\mathrm{rad}$ であり，角 ABC が直角であり，辺 AB の長さが 1 であるとする．辺 AC 上に $\overline{\mathrm{AD}}=1$ となる点 D をとり，点 D から直線 AB に下ろした垂線の足を H とおく．このとき，



$$\overline{\mathrm{DH}}=\sin x\ ,\qquad \overline{\mathrm{CB}}=\tan x\ .$$

三角形 ABC と三角形 ABD と扇形 ABD とについて，面積を比べると，

〔三角形 ABD の面積〕$\leq$〔扇形 ABD の面積〕$\leq$〔三角形 ABC の面積〕．

辺 AB を底辺とするとき三角形 ABD の高さは $\overline{\mathrm{DH}}=\sin x$ なので，三角形 ABD の面積は $\dfrac{1}{2}\sin x$ である．半径が 1 で中心角の大きさが $x\,\mathrm{rad}$ の扇形 ABD の面積は $\dfrac{1}{2}x$ である．辺 AB を底辺とするとき三角形 ABC の高さは $\overline{\mathrm{CB}}=\tan x$ なので，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\tan x$ である．従って

$$\frac{1}{2}\sin x\leq\frac{1}{2}x\leq\frac{1}{2}\tan x\ ,$$

よって $\sin x\leq x\leq\tan x$ ．　　（証明終り）

関数 f,g,h について，実数 b 以外の b に近い各実数 x について $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ とします． $x\to b$ のとき $f(x),g(x),h(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to b}f(x)\leq\lim_{x\to b}g(x)\leq\lim_{x\to b}h(x)\ ;$$

更に $\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{x\to b}h(x)=k$ ならば， $k\leq\lim_{x\to b}g(x)\leq k$ なので $\lim_{x\to b}g(x)=k$ ．

より精密に議論すると次の定理が導かれます．

定理（挟みうちの定理）　関数 f,g,h 及び実数 a,b,c について， $a<b<c$ で， $a<x<c$ かつ $x\neq b$ である各実数 x について $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ とする． $x\to b$ のとき $f(x)$ と $h(x)$ とが収束して $\lim_{x\to b}f(x)=\lim_{x\to b}h(x)=k$ ならば， $x\to b$ のとき $g(x)$ も収束して $\lim_{x\to b}g(x)=k$ ．

これらの 2 つの定理を用いて定理 2.4 を証明します．

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ ， $x\neq 0$ とします． $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ です．

まず $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のときを考えます． $\sin x\leq x\leq\tan x$ なので，

$$\sin x\leq x\ \text{かつ}\ x\leq\frac{\sin x}{\cos x}\ .$$

$x>0$ ， $\cos x>0$ なので， $x\leq\dfrac{\sin x}{\cos x}$ より $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}$ ， $\sin x\leq x$ より $\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．よって $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．

$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のときは， $0<-x<\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$\cos(-x)\leq\frac{\sin(-x)}{-x}\leq 1\ ,$$

$\cos(-x)=\cos x$ ， $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$ なので $\cos x\leq\dfrac{\sin x}{x}\leq 1$ ．

このように， $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のときも $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のときも

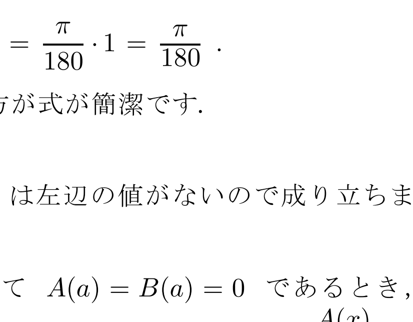
$$\cos x\leq\frac{\sin x}{x}\leq 1\ .$$

ここで $x\to 0$ とします． $\lim_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$ ， $\lim_{x\to 0}1=1$ なので，挟みうちの定理より， $x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin x}{x}$ は収束して $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ．

——— 度数法による定理 2.4

定理 2.4 では角度を弧度法で考えました．角度を度数法で考えてみます．

実数 x について $0<x<90$ とします．右下図のように，点 $\mathrm{O,A,B}$ を頂点とする扇形 OAB の半径が 1 であり中心角 AOB の度数法による大きさが x° であるとします．点 A から辺 OB に垂直に下ろした垂線の足を C とおきます．弧 AB の長さ $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 及び線分 AC の長さ $\overline{\mathrm{AC}}$ は次のようになります：



$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=2\pi\cdot\frac{x}{360}=\frac{\pi x}{180}\ ,\qquad \overline{\mathrm{AC}}=\sin x^\circ\ .$$

よって

$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}=\frac{\sin x^\circ}{\frac{\pi x}{180}}=\frac{180\sin x^\circ}{\pi x}\ .$$

x の値を 0 に限りなく近づけると $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}=\dfrac{180\sin x^\circ}{\pi x}$ の値は 1 に限りなく近づくので， $\lim_{x\to 0}\dfrac{180\sin x^\circ}{\pi x}=1$ ，よって

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi}{180}\cdot\frac{180\sin x^\circ}{\pi x}\right)=\frac{\pi}{180}\cdot 1=\frac{\pi}{180}\ .$$

角度を度数法で考えるより角度を弧度法で考える方が式が簡潔です．

---

[4] $x-3=0$ のとき，等式 $\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$ は左辺の値がないので成り立ちません．

[5] 変数 x の整式 $A(x)$, $B(x)$ 及び定数 a について $A(a)=B(a)=0$ であるとき，因数定理より， $x-a$ は $A(x)$ と $B(x)$ との両方の因数です；従って分数式 $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ は $x-a$ で約分できます．