

## §2.4 関数の極限の計算

前節で扱った極限值は、結局は実数  $a$  における関数  $f$  の連続性  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  を用いて計算しました。しかしこれだけでは計算できないときもあります；むしろこのようなときにこそ極限值を考える意味があります。

**例解** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{x^2-9}{x-3}$  の極限を考えます。  $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 3-3=0$  ですから、  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)}$  と変形できません。そこで以下のよう計算します。

$x^2-9$  を因数分解すると  $x^2-9=(x+3)(x-3)$ 。  $x \rightarrow 3$  のとき、  $x \neq 3$  つまり  $x-3 \neq 0$  ですから<sup>3)</sup>、

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3.$$

従って

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3=6. \quad \text{終}$$

この技法は覚えておいて下さい：  $x$  の整式  $A(x)$ 、 $B(x)$  及び定数  $a$  について  $A(a)=B(a)=0$  であるとき、極限值  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)}$  を求めるために、分数式  $\frac{A(x)}{B(x)}$  を  $x-a$  で約す<sup>4)</sup>。

**例題** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 1$  のときの  $\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3}$  の極限值を調べる：

$x \rightarrow 1$  のとき、  $x \neq 1$  より  $x-1 \neq 0$  なので、

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x+4}{x-3}.$$

従って

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x-3)} = \frac{1+4}{1-3} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}. \quad \text{終}$$

**問題 2.4.1** 変数  $u$  について  $u \rightarrow -2$  のときの  $\frac{u^2-u-6}{u+2}$  の極限を調べなさい。

**問題 2.4.2** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$  の極限を調べなさい。

**問題 2.4.3** 変数  $t$  について  $t \rightarrow 1$  のときの  $\frac{t^2-3t+2}{t^2-2t+3}$  の極限を調べなさい。

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin x}{x}$  の極限を調べます。

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  とします。右図のよ

うに、扇形 OAB の中心角の大きさが

$x$  rad で半径が 1 であるとします。点

A から向かいの辺 OB に垂直に下ろ

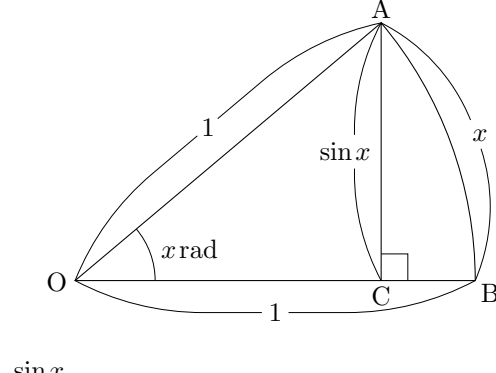
した垂線と辺 OB との交点を C とお

きます。弧 AB の長さは  $x$  で、線分

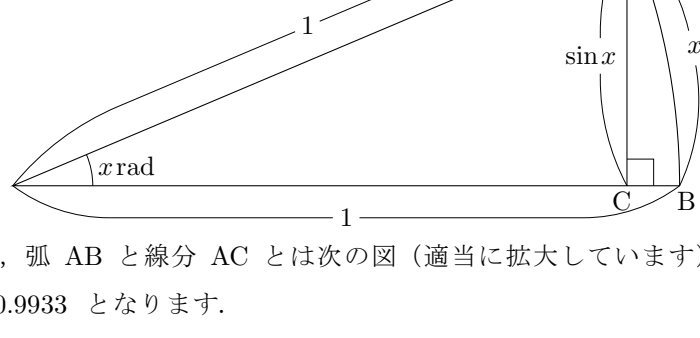
AC の長さは  $\sin x$  です。  $x=0.4$  の

とき、弧 AB と線分 AC とは次の図

(適当に拡大しています) のようになり、

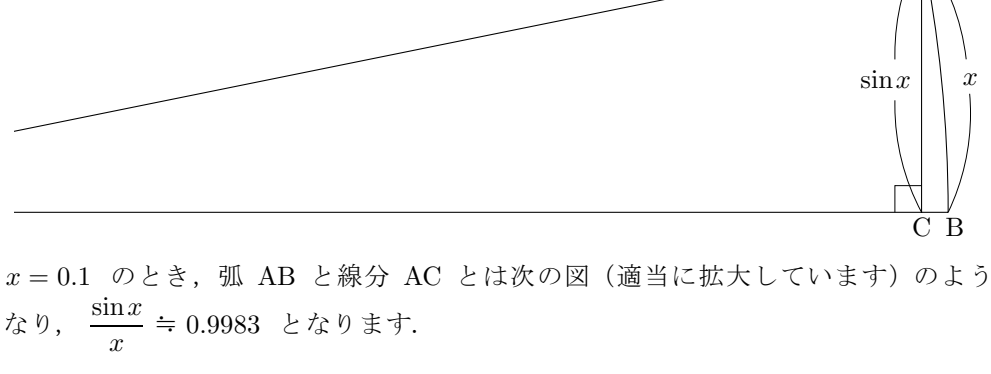


$\frac{\sin x}{x} \approx 0.9735$  となります。



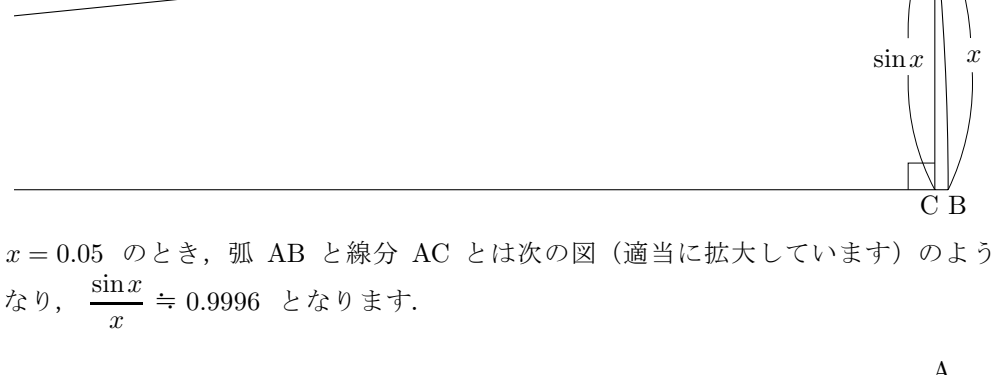
$x=0.2$  のとき、弧 AB と線分 AC とは次の図 (適当に拡大しています) のようになり、

$\frac{\sin x}{x} \approx 0.9933$  となります。



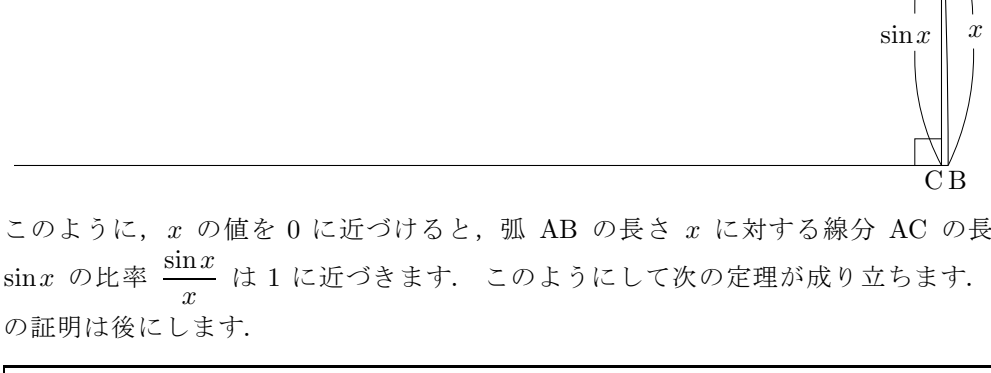
$x=0.1$  のとき、弧 AB と線分 AC とは次の図 (適当に拡大しています) のようになり、

$\frac{\sin x}{x} \approx 0.9983$  となります。



$x=0.05$  のとき、弧 AB と線分 AC とは次の図 (適当に拡大しています) のようになり、

$\frac{\sin x}{x} \approx 0.9996$  となります。



このように、 $x$  の値を 0 に近づけると、弧 AB の長さ  $x$  に対する線分 AC の長さ  $\sin x$  の比率  $\frac{\sin x}{x}$  は 1 に近づきます。このようにして次の定理が成り立ちます。その証明は後にします。

**定理 2.4** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のとき  $\frac{\sin x}{x}$  は 1 に収束する：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**例題** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin 2x}{x}$  の極限值を調べる。

**【解説】**  $y=2x$  とおく。  $x = \frac{y}{2}$  なので、

$$\frac{\sin 2x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{2}} = 2 \frac{\sin y}{y}.$$

$x \rightarrow 0$  のとき  $y=2x \rightarrow 0$  なので、定理 2.3.3 より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 2 \frac{\sin y}{y} \right).$$

定理 2.4 より  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  なので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 2 \frac{\sin y}{y} \right) = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2. \quad \text{終}$$

**問題 2.4.4** 変数  $t$  について  $t \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin \frac{t}{3}}{t}$  の極限を調べなさい。

**問題 2.4.5** 変数  $y$  について  $y \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin(y+\pi)}{y}$  の極限を調べなさい。

**例題** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan 3x}{x}$  の極限值を調べる。

**【解説】**

$$\frac{\tan 3x}{x} = \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{x} = \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 3x}.$$

$y=3x$  とおく。  $x = \frac{y}{3}$  なので、

$$\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} \cdot \frac{1}{\cos y} = \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{3}{\cos y}.$$

$x \rightarrow 0$  のとき  $y=3x \rightarrow 0$ 。定理 2.4 より

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

関数  $\cos x$  は連続なので  $\lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1$ 、よって

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3}{\cos y} = \frac{3}{\lim_{y \rightarrow 0} \cos y} = \frac{3}{1} = 3.$$

故に

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{3}{\cos y} \right) = 1 \cdot 3 = 3. \quad \text{終}$$

**問題 2.4.6** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan \frac{x}{5}}{x}$  の極限を調べなさい。

——— 定理 2.4 の証明

定理 2.4 を証明します。まず、次の定理を思い出して下さい：扇形の半径が  $r$  で中心角の大きさが  $\theta$  rad であるとき、その扇形の面積は  $\frac{1}{2}\theta r^2$  である。このことを用いて次の定理を示します。

**定理**  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  となる実数  $x$  について  $\sin x \leq x \leq \tan x$ 。

**証明**  $\angle BAC$  の大きさが  $x$  rad で  $\angle ABC$  が直

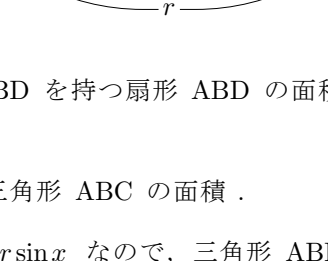
角である直角三角形 ABC を作る。辺 AC 上に

$\overline{AD} = \overline{AB}$  となる点 D をとり、点 D から直線 AB

に下ろした垂線の足を H とおく。  $\overline{AD} = \overline{AB} = r$

とおく。このとき、

$$\overline{DH} = r \sin x, \quad \overline{CB} = r \tan x.$$



三角形 ABC の面積と、三角形 ABD の面積と、弧 BD を持つ扇形 ABD の面積とを比べると、

$$\text{三角形 ABD の面積} \leq \text{扇形 ABD の面積} \leq \text{三角形 ABC の面積}.$$

辺 AB を底辺とするとき三角形 ABD の高さは  $\overline{DH} = r \sin x$  なので、三角形 ABD

の面積は  $\frac{1}{2}r^2 \sin x$ 。半径が  $r$  で中心角の大きさが  $x$  rad の扇形 ABD の面積は

$\frac{1}{2}r^2 x$ 。辺 AB を底辺とするとき三角形 ABC の高さは  $\overline{CB} = r \tan x$  なので、三角

形 ABC の面積は  $\frac{1}{2}r^2 \tan x$ 。従って

$$\frac{1}{2}r^2 \sin x \leq \frac{1}{2}r^2 x \leq \frac{1}{2}r^2 \tan x.$$

この不等式の各辺を  $\frac{1}{2}r^2$  で割ると  $\sin x \leq x \leq \tan x$ 。(証明終り)

関数  $f, g, h$  について、実数  $b$  に近い各実数  $x$  について  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  とし

ます。  $x \rightarrow b$  のとき  $f(x), g(x), h(x)$  が収束するならば、

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow b} h(x);$$

更に  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} h(x) = k$  ならば、  $k \leq \lim_{x \rightarrow b} g(x) \leq k$  なので  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = k$ 。より精密に議論すると次の定理が導かれます。

**定理 (挟みうちの定理)** 関数  $f, g, h$  及び実数  $a, b, c$  について、  $a < b < c$  で、  $a < x < c$  かつ  $x \neq b$  である各実数  $x$  について  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  とする。  $x \rightarrow b$  のとき  $f(x)$  と  $h(x)$  とが収束して  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} h(x) = k$  ならば、  $x \rightarrow b$  のとき  $g(x)$  も収束して  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = k$ 。

これらの 2 つの定理を用いて定理 2.4 を証明します。

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 、  $x \neq 0$  とします。  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  または  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  です。

まず  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のときを考えます。先に述べた定理より  $\sin x \leq x \leq \tan x$  なので、

$$\sin x \leq x \quad \text{かつ} \quad x \leq \frac{\sin x}{\cos x}.$$

$x > 0$ 、  $\cos x > 0$  なので、  $x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$  より  $\cos x \leq \frac{\sin x}{x}$ 、  $\sin x \leq x$  より

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1. \quad \text{従って、} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{のとき} \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$  のときは、  $0 < -x < \frac{\pi}{2}$  なので

$$\cos(-x) \leq \frac{\sin(-x)}{-x} \leq 1,$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} \quad \text{なので} \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

このように、  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のときも  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  のときも  $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ ；つまり、

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 、  $x \neq 0$  のとき、

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

ここで  $x \rightarrow 0$  とします。  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ 、  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$  なので、挟みうちの定理より、  $x \rightarrow 0$  のとき  $\frac{\sin x}{x}$  は収束して  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。

3)  $x-3=0$  のとき、等式  $\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3$  は左辺の値がないので成り立ちません。

4)  $x$  の整式  $A(x)$ 、 $B(x)$  及び定数  $a$  について  $A(a)=B(a)=0$  であるとき、因数定理より、  $x-a$  は  $A(x)$  と  $B(x)$  との両方の因数です；従って分数式  $\frac{A(x)}{B(x)}$  は  $x-a$  で約分できます。