

§ 2.7 微分係数

関数 f の定義域の実数 a に対して、極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ があるならば、それを a における f の微分係数といたしました。ここで、変数 t に対して変数 h を $h = t - a$ とおきます。 $t = a + h$ ですから、

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

$t \rightarrow a$ のとき $h = t - a \rightarrow 0$ ですから、定理 2.3.3 より、

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

よって、関数 f の定義域の実数 a に対して、

$$a \text{ における } f \text{ の微分係数} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ より極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ の方が計算し易いことが多いので、**微分係数**を $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ と定義します。

定義 関数 f の定義域の実数 a について、 $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ が収束するならば、関数 f は a において微分可能であるといい、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という。

例題 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める。微分係数の定義に直接従って、2 における関数 g の微分係数を調べる。

$$\text{微分係数の定義より、2 における関数 } g \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2 + h) - g(2)}{h}.$$

$$\begin{aligned} g(2 + h) - g(2) &= 3(2 + h)^2 - 5(2 + h) - (3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2) = 12h + 3h^2 - 5h \\ &= 7h + 3h^2, \end{aligned}$$

よって、2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2 + h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (7 + 3h) = 7. \quad \text{終}$$

問題 2.7.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定めます。微分係数の定義に直接従って、5 における関数 f の微分係数を調べなさい。

例題 $\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x - 5}$ と定める。微分係数の定義に直接従って、4 における関数 ψ の微分係数を調べる。

$$\text{微分係数の定義より、4 における関数 } \psi \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(4 + h) - \psi(4)}{h}.$$

$$\begin{aligned} \psi(4 + h) - \psi(4) &= \frac{2}{3(4 + h) - 5} - \frac{2}{3 \cdot 4 - 5} = \frac{2}{3h + 7} - \frac{2}{7} = \frac{14 - 2(3h + 7)}{7(3h + 7)} \\ &= -\frac{6h}{7(3h + 7)}, \end{aligned}$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(4 + h) - \psi(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{6h}{7(3h + 7)}}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6}{7(3h + 7)} = -\frac{6}{7 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 7)} \\ &= -\frac{6}{49}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 2.7.2 $\frac{5}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{4x - 7}$ と定めます。微分係数の定義に直接従って、3 における関数 φ の微分係数を調べなさい。

次の定理が成り立ちます。

定理 2.7.1 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a).$$

証明 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する。極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

があるので、これを b とおく：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = b.$$

$\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ なので、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = b \cdot 0 = 0.$$

$h \rightarrow 0$ のとき $h \neq 0$ なので $f(a + h) - f(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h$ 、従って

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(a + h) - f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h \right\} = 0.$$

更に、 $f(a)$ は変数 h と無関係なので、定理 2.3.1 より

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a + h) - f(a) + f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a + h) - f(a)\} + f(a) \\ &= 0 + f(a) = f(a), \end{aligned}$$

つまり $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$ 。(証明終り)

この定理より次の定理が導かれます。

定理 2.7.2 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば、 f は a において連続である。

証明 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する。変数 h, t について $h = t - a$ とする。 $t = a + h$ より $f(t) = f(a + h)$ であり、 $t \rightarrow a$ のとき $h \rightarrow 0$ なので、定理 2.3.3 より

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h).$$

定理 2.7.1 より $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$ なので、 $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$ 。つまり f は a において連続である。(証明終り)

つまり、関数 f 及び f の定義域の実数 a について、

$$f \text{ が } a \text{ において微分可能 ならば } f \text{ は } a \text{ において連続}$$

です。しかしこの逆は必ずしも成り立ちません：関数 f が a において連続であっても f が a において微分可能でないこともあります。