§2.7　微分係数

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といいました．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおきます．$t=a+h$ ですから，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき $h=t-a\to 0$ ですから，定理2.3.3より，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 f の定義域の実数 a に対して，

$$a \text{ における } f \text{ の微分係数} = \lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

極限値 $\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ より極限値 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の方が計算し易いことが多いので，**微分係数**を $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と定義します．

定義　関数 f の定義域の実数 a について，$h\to 0$ のとき $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という．

例題　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=3x^2-5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる．

微分係数の定義より，2 における関数 g の微分係数は $\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}$ ．

$$\begin{aligned}g(2+h)-g(2)&=3(2+h)^2-5(2+h)-(3\cdot 2^2-5\cdot 2)=12h+3h^2-5h\\&=7h+3h^2\ ,\end{aligned}$$

よって，2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{7h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(7+3h)=7\ .$$

終

問題 2.7.1　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=2x^2-7x$ と定めます．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 f の微分係数を調べなさい．

例題　$\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\frac{2}{3x-5}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる．

微分係数の定義より，4 における関数 ψ の微分係数は $\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}$ ．

$$\begin{aligned}\psi(4+h)-\psi(4)&=\frac{2}{3(4+h)-5}-\frac{2}{3\cdot 4-5}=\frac{2}{3h+7}-\frac{2}{7}=\frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}\\&=-\frac{6h}{7(3h+7)}\ ,\end{aligned}$$

よって，4 における関数 ψ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{6h}{7(3h+7)}}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{6}{7(3h+7)}=-\frac{6}{7\cdot\lim_{h\to 0}(3h+7)}\\&=-\frac{6}{49}\ .\end{aligned}$$

終

問題 2.7.2　$\frac{5}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=\frac{5}{4x-7}$ と定めます．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べなさい．

次の定理が成り立ちます．

定理 2.7.1　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば $\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ ．

証明　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．極限値 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ があるので，これを b とおく：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b\ .$$

$\lim_{h\to 0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

$h\to 0$ のとき $h\neq 0$ なので $f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ ，従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=0\ .$$

更に，$f(a)$ は変数 h と無関係なので，定理2.3.1より

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}f(a+h)&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)+f(a)\}=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}+f(a)\\&=0+f(a)=f(a)\ ,\end{aligned}$$

つまり $\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ ．（証明終り）

この定理より次の定理が導かれます．

定理 2.7.2　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば，f は a において連続である．

証明　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．変数 h,t について $h=t-a$ とする．$t=a+h$ より $f(t)=f(a+h)$ であり，$t\to a$ のとき $h\to 0$ なので，定理2.3.3より

$$\lim_{t\to a}f(t)=\lim_{h\to 0}f(a+h)\ .$$

定理2.7.1より $\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ なので，$\lim_{t\to a}f(t)=f(a)$ ．つまり f は a において連続である．（証明終り）

つまり，関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

f が a において微分可能　ならば　f は a において連続

です．しかしこの逆は必ずしも成り立ちません：関数 f が a において連続であっても f が a において微分可能でないこともあります．