

## § 2.7 微分係数

関数  $f$  の定義域の実数  $a$  に対して、極限值  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  があるならば、それを  $a$  における  $f$  の微分係数といたしました。ここで、変数  $t$  に対して変数  $h$  を  $h = t - a$  とおきます。  $t = a + h$  ですから、

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

$t \rightarrow a$  のとき  $h = t - a \rightarrow 0$  ですから、定理 2.3.3 より、

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

よって、関数  $f$  の定義域の実数  $a$  に対して、

$$a \text{ における } f \text{ の微分係数} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

極限值  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$  より極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  の方が計算し易いことが多いので、**微分係数**を  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  と定義します。

**定義** 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、  $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  が収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = 3x^2 - 5x$  と定める。微分係数の定義に直接従って、2 における関数  $g$  の微分係数を調べる。

$$\text{微分係数の定義より、2 における関数 } g \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2 + h) - g(2)}{h}.$$

$$\begin{aligned} g(2 + h) - g(2) &= 3(2 + h)^2 - 5(2 + h) - (3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2) = 12h + 3h^2 - 5h \\ &= 7h + 3h^2, \end{aligned}$$

よって、2 における関数  $g$  の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2 + h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (7 + 3h) = 7. \quad \text{終}$$

**問題 2.7.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = 2x^2 - 7x$  と定めます。微分係数の定義に直接従って、5 における関数  $f$  の微分係数を調べなさい。

**例題**  $\frac{5}{3}$  以外の実数の全体を定義域とする関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \frac{2}{3x - 5}$  と定める。微分係数の定義に直接従って、4 における関数  $\psi$  の微分係数を調べる。

$$\text{微分係数の定義より、4 における関数 } \psi \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(4 + h) - \psi(4)}{h}.$$

$$\begin{aligned} \psi(4 + h) - \psi(4) &= \frac{2}{3(4 + h)} - 5 - \frac{2}{3 \cdot 4 - 5} = \frac{2}{3h + 7} - \frac{2}{7} = \frac{14 - 2(3h + 7)}{7(3h + 7)} \\ &= -\frac{6h}{7(3h + 7)}, \end{aligned}$$

よって、4 における関数  $\psi$  の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(4 + h) - \psi(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{6h}{7(3h + 7)}}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6}{7(3h + 7)} = -\frac{6}{7 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (3h + 7)} \\ &= -\frac{6}{49}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

**問題 2.7.2**  $\frac{5}{4}$  以外の実数の全体を定義域とする関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = \frac{5}{4x - 7}$  と定めます。微分係数の定義に直接従って、3 における関数  $\varphi$  の微分係数を調べなさい。

次の定理が成り立ちます。

**定理 2.7.1** 関数  $f$  が定義域の実数  $a$  において微分可能であるならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a).$$

**証明** 関数  $f$  が定義域の実数  $a$  において微分可能であると仮定する。極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

があるので、これを  $b$  とおく：

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = b.$$

$\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$  なので、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = b \cdot 0 = 0.$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $h \neq 0$  なので  $f(a + h) - f(a) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h$  , 従って

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(a + h) - f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h \right\} = 0.$$

更に、 $f(a)$  は変数  $h$  と無関係なので、定理 2.3.1 より

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a + h) - f(a) + f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a + h) - f(a)\} + f(a) \\ &= 0 + f(a) = f(a), \end{aligned}$$

つまり  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$  . (証明終り)

この定理より次の定理が導かれます。

**定理 2.7.2** 関数  $f$  が定義域の実数  $a$  において微分可能であるならば、 $f$  は  $a$  において連続である。

**証明** 関数  $f$  が定義域の実数  $a$  において微分可能であると仮定する。変数  $h, t$  について  $h = t - a$  とする。  $t = a + h$  より  $f(t) = f(a + h)$  であり、  $t \rightarrow a$  のとき  $h \rightarrow 0$  なので、定理 2.3.3 より

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h).$$

定理 2.7.1 より  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$  なので、  $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$  . つまり  $f$  は  $a$  において連続である。(証明終り)

つまり、関数  $f$  及び  $f$  の定義域の実数  $a$  について、

$$f \text{ が } a \text{ において微分可能 ならば } f \text{ は } a \text{ において連続}$$

です。しかしこの逆は必ずしも成り立ちません：関数  $f$  が  $a$  において連続であっても  $f$  が  $a$  において微分可能でないこともあります。