§2.8　三角関数の微分係数

実数 a に対して，a における関数 f の微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ でした．正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の微分係数は次のようになります．

定理 2.8　任意の実数 a に対して，a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos a \ ,$$

a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = -\sin a \ .$$

定理 2.8 を証明します．定理 2.4 が重要になります：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \ .$$

まず，実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ を調べます．正弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式（0.8 節参照）

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \quad (A, B \text{ は任意の実数})$$

を用います．

$$\sin(a+h)-\sin a = 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \ ,$$

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{1}{h}\{\sin(a+h)-\sin a\} = \frac{2}{h}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \ .$$

$t=\dfrac{h}{2}$ とおきます．$h=2t$ なので，

$$\frac{2}{h}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} = \frac{2}{2t}\cos(a+t)\sin t = \frac{1}{t}\cos(a+t)\sin t = \cos(a+t)\frac{\sin t}{t} \ ,$$

従って

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos(a+t)\frac{\sin t}{t} \ .$$

$h\to 0$ のとき $t=\dfrac{h}{2}\to 0$ なので，定理 2.3.3 より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\} \ .$$

余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\displaystyle\lim_{t\to 0}\cos(a+t) = \cos\left\{\lim_{t\to 0}(a+t)\right\} = \cos a$ ．　また $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ ．よって，

$$\lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\} = \lim_{t\to 0}\cos(a+t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \cos a\cdot 1 = \cos a \ .$$

故に，実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\} = \cos a \ .$$

次に，実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を調べます．余弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式（0.8 節参照）

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \quad (A, B \text{ は実数})$$

を用います．

$$\cos(a+h)-\cos a = -2\sin\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = -2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \ ,$$

$$\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \frac{1}{h}\{\cos(a+h)-\cos a\} = -\frac{2}{h}\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \ .$$

$t=\dfrac{h}{2}$ とおきます．$h=2t$ なので，

$$\begin{aligned}-\frac{2}{h}\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} &= -\frac{2}{2t}\sin(a+t)\sin t = -\frac{1}{t}\sin(a+t)\sin t \\ &= -\sin(a+t)\frac{\sin t}{t} \ ,\end{aligned}$$

従って

$$\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = -\sin(a+t)\frac{\sin t}{t} \ .$$

$h\to 0$ のとき $t=\dfrac{h}{2}\to 0$ ．定理 2.3.3 より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\} \ .$$

正弦関数 $\sin x$ は連続なので $\displaystyle\lim_{t\to 0}\sin(a+t) = \sin\left\{\lim_{t\to 0}(a+t)\right\} = \sin a$ ．　また $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ ．実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} &= \lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\} \\ &= -\lim_{t\to 0}\sin(a+t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = -\sin a\cdot 1 \\ &= -\sin a \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

〔方針〕　公式 $\sin A-\sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ （A, B は任意の実数）を用いる．

〔解答〕

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a) &= \sin\{5(a+h)\}-\sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2} \\ &= 2\cos\left(5a+\frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2} \ .\end{aligned}$$

変数 x を $x=\dfrac{5h}{2}$ とおく．$h=\dfrac{2x}{5}$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{2\cos\left(5a+\dfrac{5h}{2}\right)\sin\dfrac{5h}{2}}{h} = \frac{2\cos(5a+x)\sin x}{\dfrac{2x}{5}} \\ &= 5\cos(5a+x)\frac{\sin x}{x} \ .\end{aligned}$$

$h\to 0$ のとき $x=\dfrac{5h}{2}\to 0$ ．余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos(5a+x) = \cos\left\{\lim_{x\to 0}(5a+x)\right\} = \cos(5a)$ ．また $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ．実数 a における f の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{x\to 0}\left\{5\cos(5a+x)\frac{\sin x}{x}\right\} \\ &= 5\left\{\lim_{x\to 0}\cos(5a+x)\right\}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 5\cos(5a)\cdot 1 \\ &= 5\cos 5a \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.8}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\cos 3x$ と定めます．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べなさい．