§2.8　三角関数の微分係数

実数 a に対して，a における関数 f の微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ でした．正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の微分係数は次のようになります．

定理 2.8　任意の実数 a に対して，a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos a\ ,$$

a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = -\sin a\ .$$

定理 2.8 を証明します．定理 2.4 が重要になります：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\ .$$

まず，実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ を調べます．正弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式（0.8 節参照）

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\quad（A, B\ は任意の実数）$$

を用います．

$$\sin(a+h)-\sin a = 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\Bigl(a+\frac{h}{2}\Bigr)\sin\frac{h}{2}\ ,$$

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{1}{h}\{\sin(a+h)-\sin a\} = \frac{2}{h}\cos\Bigl(a+\frac{h}{2}\Bigr)\sin\frac{h}{2}\ .$$

$t=\dfrac{h}{2}$ とおきます．$h=2t$ なので，

$$\frac{2}{h}\cos\Bigl(a+\frac{h}{a}\Bigr)\sin\frac{h}{2} = \frac{2}{2t}\cos(a+t)\sin t = \frac{1}{t}\sin t\cos(a+t) = \frac{\sin t}{t}\cos(a+t)\ ,$$

従って

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{\sin t}{t}\cos(a+t)\ .$$

$t=\dfrac{h}{2}$ より，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ なので，定理 2.3.3 より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin t}{t}\cos(a+t)\right\}\ .$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\cos(a+t)=\cos\Bigl\{\lim_{t\to 0}(a+t)\Bigr\}=\cos a$ なので，

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin t}{t}\cos(a+t)\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos(a+t) = 1\cdot\cos a = \cos a\ .$$

故に，実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{\sin t}{t}\cos(a+t)\right\} = \cos a\ .$$

次に，実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を調べます．余弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式（0.8 節参照）

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\quad（A, B\ は実数）$$

を用います．

$$\cos(a+h)-\cos a = -2\sin\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = -2\sin\Bigl(a+\frac{h}{2}\Bigr)\sin\frac{h}{2}\ ,$$

$$\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \frac{1}{h}\{\cos(a+h)-\cos a\} = -\frac{2}{h}\sin\Bigl(a+\frac{h}{2}\Bigr)\sin\frac{h}{2}\ .$$

$t=\dfrac{h}{2}$ とおきます．$h=2t$ なので，

$$\begin{aligned}-\frac{2}{h}\sin\Bigl(a+\frac{h}{a}\Bigr)\sin\frac{h}{2} &= -\frac{2}{2t}\sin(a+t)\sin t = -\frac{1}{t}\sin t\sin(a+t)\\ &= -\frac{\sin t}{t}\sin(a+t)\ ,\end{aligned}$$

従って

$$\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = -\frac{\sin t}{t}\sin(a+t)\ .$$

$t=\dfrac{h}{2}$ なので，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ ．定理 2.3.3 より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{-\frac{\sin t}{t}\sin(a+t)\right\}\ .$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\sin(a+t)=\sin\Bigl\{\lim_{t\to 0}(a+t)\Bigr\}=\sin a$ なので，実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} &= \lim_{t\to 0}\left\{-\frac{\sin t}{t}\sin(a+t)\right\}\\ &= -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\sin(a+t) = -1\cdot\sin a\\ &= -\sin a\ .\end{aligned}$$

例題　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

〔方針〕　公式 $\sin A-\sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ （A, B は任意の実数）を用いる．

〔解答〕

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a) &= \sin\{5(a+h)\}-\sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2}\\ &= 2\cos\Bigl(5a+\frac{5h}{2}\Bigr)\sin\frac{5h}{2}\ .\end{aligned}$$

変数 x を $x=\dfrac{5h}{2}$ とおく．$h=\dfrac{2x}{5}$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{2\cos\Bigl(5a+\dfrac{5h}{2}\Bigr)\sin\dfrac{5h}{2}}{h} = \frac{2\cos(5a+x)\sin x}{\dfrac{2x}{5}}\\ &= 5\cos(5a+x)\frac{\sin x}{x}\ .\end{aligned}$$

$h\to 0$ のとき $x=\dfrac{5h}{2}\to 0$ ．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ なので，実数 a における f の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{x\to 0}\left\{5\cos(5a+x)\frac{\sin x}{x}\right\}\\ &= 5\Bigl\{\lim_{x\to 0}\cos(5a+x)\Bigr\}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 5\cos(5a+0)\cdot 1\\ &= 5\cos 5a\ .\end{aligned}$$

終

問題 2.8.1　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\cos 3x$ と定めます．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べなさい．