

## § 2.8 三角関数の微分係数

実数  $a$  に対して、 $a$  における関数  $f$  の微分係数は極限値  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  でした。正弦関数  $\sin x$  及び余弦関数  $\cos x$  の微分係数は次のようになります。

**定理 2.8** 任意の実数  $a$  に対して、 $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a,$$

$a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a.$$

定理 2.8 を証明します。定理 2.4 が重要になります：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

まず、実数  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  を調べます。正弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式 (0.8 節参照)

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (A, B \text{ は任意の実数})$$

を用います。

$$\begin{aligned} \sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}, \\ \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{1}{h} \{\sin(a+h) - \sin a\} = \frac{2}{h} \cos \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

$t = \frac{h}{2}$  とおきます。  $h = 2t$  なので、

$$\frac{2}{h} \cos \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} = \frac{2}{2t} \cos(a+t) \sin t = \frac{1}{t} \cos(a+t) \sin t = \cos(a+t) \frac{\sin t}{t},$$

従って

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos(a+t) \frac{\sin t}{t}.$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{h}{2} \rightarrow 0$  なので、定理 2.3.3 より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\}.$$

余弦関数  $\cos x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \cos a$ 。また

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ 。よって、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a \cdot 1 = \cos a.$$

故に、実数  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = \cos a.$$

次に、実数  $a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  を調べます。余弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式 (0.8 節参照)

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (A, B \text{ は実数})$$

を用います。

$$\begin{aligned} \cos(a+h) - \cos a &= -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2 \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}, \\ \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \frac{1}{h} \{\cos(a+h) - \cos a\} = -\frac{2}{h} \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

$t = \frac{h}{2}$  とおきます。  $h = 2t$  なので、

$$\begin{aligned} -\frac{2}{h} \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} &= -\frac{2}{2t} \sin(a+t) \sin t = -\frac{1}{t} \sin(a+t) \sin t \\ &= -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t}, \end{aligned}$$

従って

$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t}.$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{h}{2} \rightarrow 0$ 。定理 2.3.3 より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\}.$$

正弦関数  $\sin x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \sin a$ 。また

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ 。実数  $a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -\sin a \cdot 1 \\ &= -\sin a. \end{aligned}$$

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \sin 5x$  と定める。微分係数の定義に直接従って、実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べる。

【方針】 公式  $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$  ( $A, B$  は任意の実数) を用いる。

【解答】

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2 \cos \frac{5(2a+h)}{2} \sin \frac{5h}{2} \\ &= 2 \cos \left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}. \end{aligned}$$

変数  $x$  を  $x = \frac{5h}{2}$  とおく。  $h = \frac{2x}{5}$  なので、

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{2 \cos \left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}}{h} = \frac{2 \cos(5a+x) \sin x}{\frac{2x}{5}} \\ &= 5 \cos(5a+x) \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $x = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$ 。余弦関数  $\cos x$  は連続なので  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(5a+x) =$

$\cos \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (5a+x) \right\} = \cos(5a)$ 。また  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 。実数  $a$  における  $f$  の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 5 \cos(5a+x) \frac{\sin x}{x} \right\} \\ &= 5 \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \cos(5a+x) \right\} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 5 \cos(5a) \cdot 1 \\ &= 5 \cos 5a. \end{aligned}$$

終

**問題 2.8** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \cos 3x$  と定めます。微分係数の定義に直接従って、実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べなさい。