

§ 2.8 三角関数の微分係数

実数 a に対して、 a における関数 f の微分係数は極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ でした。正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の微分係数は次のようになります。

定理 2.8 任意の実数 a に対して、 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a,$$

a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a.$$

定理 2.8 を証明します。定理 2.4 が重要になります：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

まず、実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ を調べます。正弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式 (0.8 節参照)

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (A, B \text{ は任意の実数})$$

を用います。

$$\begin{aligned} \sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}, \\ \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{1}{h} \{\sin(a+h) - \sin a\} = \frac{2}{h} \cos \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

$t = \frac{h}{2}$ とおきます。 $h = 2t$ なので、

$$\frac{2}{h} \cos \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} = \frac{2}{2t} \cos(a+t) \sin t = \frac{1}{t} \sin t \cos(a+t) = \frac{\sin t}{t} \cos(a+t),$$

従って

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin t}{t} \cos(a+t).$$

$t = \frac{h}{2}$ より、 $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ なので、定理 2.3.3 より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin t}{t} \cos(a+t) \right\}.$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \cos a$ なので、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin t}{t} \cos(a+t) \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = 1 \cdot \cos a = \cos a.$$

故に、実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin t}{t} \cos(a+t) \right\} = \cos a.$$

次に、実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$ を調べます。余弦の差を正弦・余弦の積の形に変形する公式 (0.8 節参照)

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \quad (A, B \text{ は実数})$$

を用います。

$$\begin{aligned} \cos(a+h) - \cos a &= -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2 \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}, \\ \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \frac{1}{h} \{\cos(a+h) - \cos a\} = -\frac{2}{h} \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

$t = \frac{h}{2}$ とおきます。 $h = 2t$ なので、

$$\begin{aligned} -\frac{2}{h} \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} &= -\frac{2}{2t} \sin(a+t) \sin t = -\frac{1}{t} \sin t \sin(a+t) \\ &= -\frac{\sin t}{t} \sin(a+t), \end{aligned}$$

従って

$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\frac{\sin t}{t} \sin(a+t).$$

$t = \frac{h}{2}$ なので、 $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ 。定理 2.3.3 より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\sin t}{t} \sin(a+t) \right\}.$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \sin a$ なので、実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\sin t}{t} \sin(a+t) \right\} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = -1 \cdot \sin a \\ &= -\sin a. \end{aligned}$$

【例題】 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める。微分係数の定義に直接従って、実数 a における関数 f の微分係数を調べる。

【方針】 公式 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ (A, B は任意の実数) を用いる。

【解答】

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2 \cos \frac{5(2a+h)}{2} \sin \frac{5h}{2} \\ &= 2 \cos \left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}. \end{aligned}$$

変数 x を $x = \frac{5h}{2}$ とおく。 $h = \frac{2x}{5}$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{2 \cos \left(5a + \frac{5h}{2}\right) \sin \frac{5h}{2}}{h} = \frac{2 \cos(5a+x) \sin x}{\frac{2x}{5}} \\ &= 5 \cos(5a+x) \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ のとき $x = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$ 。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ なので、実数 a における f の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 5 \cos(5a+x) \frac{\sin x}{x} \right\} \\ &= 5 \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \cos(5a+x) \right\} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 5 \cos(5a+0) \cdot 1 \\ &= 5 \cos 5a. \end{aligned}$$

終

【問題 2.8.1】 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \cos 3x$ と定めます。微分係数の定義に直接従って、実数 a における関数 f の微分係数を調べなさい。