

§ 2.9 対数関数の微分係数

指数関数より対数関数の方が微分係数を調べ易いので、対数関数の微分係数を調べます。そのためにまず定理の一つ準備します。その証明は難しいので省略します。

定理 0 以外の 0 に近い実数を表す変数 x に対して、 $x \rightarrow 0$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある正の実数に収束する。

実際に変数 x の値を 0 に近づけていくときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値の極限を調べます。

x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値	x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
0.01	2.7048138...	-0.01	2.7319990...
0.0001	2.7181459...	-0.0001	2.7184178...
0.000001	2.7182805...	-0.000001	2.7182832...
0.00000001	2.7182818...	-0.00000001	2.7182818...

精密に計算すると次のようになります：

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この極限値を e と書き表します：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数 e は**自然対数の底**⁶⁾といわれ、解析学において大変重要な定数です。自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ は実数ですが有理数ではありません；つまり無理数です。自然対数の底 e の値は約 2.72 と覚えて下さい。

定理 2.9 実数 a について $a > 0$, $a \neq 0$ とする。正の実数 b に対して、 a を底とする対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b}$$

定理 2.9 を証明します。実数 a について $a > 0$, $a \neq 0$ で、実数 b について $b > 0$ とします、まず、対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right)$$

$t = \frac{h}{b}$ とおきます。 $h = bt$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} &= \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right)}{h} = \frac{\log_a(1+t)}{bt} = \frac{1}{bt} \log_a(1+t) \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{t} \log_a(1+t); \end{aligned}$$

対数の性質より $\frac{1}{t} \log_a(1+t) = \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$ なので、

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$t = \frac{h}{b}$ で b は定数なので、 $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ 。従って、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

ここで $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$ ですから、

$$\frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \log_a e = \frac{\log_a e}{b}$$

故に、対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b}$$

こうして定理 2.9 が証明されました。

自然対数の底 $e = 2.718281828 \dots$ について、 $e > 0$, $e \neq 1$ ですから、定数 e を底とする対数 $\log_e X$ ($X > 0$) を考えることができます。正の実数 b に対して、定数 e を底とする対数関数 $\log_e x$ の b における微分係数は、定理 2.9 より、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b}$$

このように、定数 e を底とする対数関数の微分係数は簡単な式で表されます。

定数 e を底とする対数を自然対数といいます。解析学では自然対数をよく用いるので、自然対数 $\log_e X$ を $\ln X$ と略記します⁷⁾。つまり、正の実数 X に対して、 $\ln X$ は自然対数 $\log_e X$ を意味します：

$$\ln X = \log_e X$$

⁶⁾ 話を簡単にするために自然対数の底を $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ と定義しましたが、自然対数の底 e の一般的な定義は別にあります。第 4 章の補遺 4 で述べます。

⁷⁾ 正の実数 X に対して、数学では自然対数 $\log_e X$ を $\log X$ と略記します。また、工学では常用対数 $\log_{10} X$ を $\log X$ と略記することがあります。ですから、 $\log X$ は自然対数 $\log_e X$ を意味するときと常用対数 $\log_{10} X$ を意味するときとがあります。紛らわしいので、本書では自然対数 $\log_e X$ を $\ln X$ と略記します。