

## § 2.9 対数関数の微分係数

指数関数より対数関数の方が微分係数を調べ易いので、対数関数の微分係数を調べます。そのためにまず定理の一つ準備します。その証明は難しいので省略します。

**定理** 0 以外の 0 に近い実数を表す変数  $x$  に対して、 $x \rightarrow 0$  のとき  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  はある正の実数に収束する。

実際に変数  $x$  の値を 0 に近づけていくときの  $(1+x)^{\frac{1}{x}}$  の値の極限を調べます。

$x$ の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値	$x$ の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
0.01	2.7048138...	-0.01	2.7319990...
0.0001	2.7181459...	-0.0001	2.7184178...
0.000001	2.7182805...	-0.000001	2.7182832...
0.00000001	2.7182818...	-0.00000001	2.7182818...

精密に計算すると次のようになります：

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この極限値を  $e$  と書き表します：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数  $e$  は**自然対数の底**<sup>7)</sup>といわれ、解析学において大変重要な定数です。自然対数の底  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  は実数ですが有理数ではありません；つまり無理数です。自然対数の底  $e$  の値は約 2.72 と覚えて下さい。

**定理 2.9** 実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 0$  とする。正の実数  $b$  に対して、 $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

定理 2.9 を証明します。実数  $a$  について  $a > 0$  ,  $a \neq 0$  で、実数  $b$  について  $b > 0$  とします、まず、対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right) .$$

$t = \frac{h}{b}$  とおきます。  $h = bt$  なので、

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} &= \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right)}{h} = \frac{\log_a(1+t)}{bt} = \frac{1}{bt} \log_a(1+t) \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{t} \log_a(1+t) ; \end{aligned}$$

対数の性質より  $\frac{1}{t} \log_a(1+t) = \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$  なので、

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$  で  $b$  は定数なので、 $h \rightarrow 0$  のとき  $t \rightarrow 0$  . 従って、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

ここで  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$  ですから、

$$\frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \log_a e = \frac{\log_a e}{b} .$$

故に、対数関数  $\log_a x$  の  $b$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

こうして定理 2.9 が証明されました。

自然対数の底  $e = 2.718281828 \dots$  について、 $e > 0$  ,  $e \neq 1$  ですから、定数  $e$  を底とする対数  $\log_e X$  ( $X > 0$ ) を考えることができます。正の実数  $b$  に対して、定数  $e$  を底とする対数関数  $\log_e x$  の  $b$  における微分係数は、定理 2.9 より、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b} .$$

このように、定数  $e$  を底とする対数関数の微分係数は簡単な式で表されます。

定数  $e$  を底とする対数を自然対数といいます。解析学では自然対数をよく用いるので、自然対数  $\log_e X$  を  $\ln X$  と略記します<sup>8)</sup>。つまり、正の実数  $X$  に対して、 $\ln X$  は自然対数  $\log_e X$  を意味します：

$$\ln X = \log_e X .$$

<sup>7)</sup> 話を簡単にするために自然対数の底を  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  と定義しましたが、自然対数の底  $e$  の一般的な定義は別にあります。第 4 章の補遺 4 で述べます。

<sup>8)</sup> 正の実数  $X$  に対して、数学では自然対数  $\log_e X$  を  $\log X$  と略記します。また、工学では常用対数  $\log_{10} X$  を  $\log X$  と略記することがあります。ですから、 $\log X$  は自然対数  $\log_e X$  を意味するときと常用対数  $\log_{10} X$  を意味するときとがあります。紛らわしいので、本書では自然対数  $\log_e X$  を  $\ln X$  と略記します。