§2.9　対数関数の微分係数

指数関数より対数関数の方が微分係数を調べ易いので，対数関数の微分係数を調べます．そのためにまず定理を一つ準備します．その証明は難しいので省略します．

定理　0 以外の 0 に近い実数を表す変数 x に対して，$x \to 0$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある正の実数に収束する．

実際に変数 x の値を 0 に近づけていくときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値の極限を調べます．

x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
0.01	2.7048138⋯
0.0001	2.7181459⋯
0.000001	2.7182805⋯
0.00000001	2.7182818⋯

x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
−0.01	2.7319990⋯
−0.0001	2.7184178⋯
−0.000001	2.7182832⋯
−0.00000001	2.7182818⋯

精密に計算すると次のようになります：

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045\cdots\ .$$

この極限値を e と書き表します：

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045\cdots\ .$$

この定数 e は**自然対数の底**[6] といわれ，解析学において大変重要な定数です．自然対数の底 $e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ は実数ですが有理数ではありません；つまり無理数です．自然対数の底 e の値は約 2.72 と覚えて下さい．

定理 2.9　実数 a について $a>0$，$a \neq 0$ とする．正の実数 b に対して，a を底とする対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b}\ .$$

定理 2.9 を証明します．実数 a について $a>0$，$a \neq 0$ で，実数 b について $b>0$ とします，まず，対数の性質より

$$\log_a(b+h)-\log_a b = \log_a\frac{b+h}{b} = \log_a\left(1+\frac{h}{b}\right)\ .$$

$t=\dfrac{h}{b}$ とおきます．$h=bt$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} &= \frac{\log_a\left(1+\dfrac{h}{b}\right)}{h} = \frac{\log_a(1+t)}{bt} = \frac{1}{bt}\log_a(1+t)\\ &= \frac{1}{b}\frac{1}{t}\log_a(1+t)\ ;\end{aligned}$$

対数の性質より $\dfrac{1}{t}\log_a(1+t)=\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$ なので，

$$\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\ .$$

$t=\dfrac{h}{b}$ で b は定数なので，$h\to 0$ のとき $t\to 0$．従って，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{b}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{b}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}\ .$$

ここで $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e>0$ ですから，

$$\frac{1}{b}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b}\log_a\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{1}{b}\log_a e = \frac{\log_a e}{b}\ .$$

故に，対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(b+h)-\log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b}\ .$$

こうして定理 2.9 が証明されました．

自然対数の底 $e=2.718281828\cdots$ について，$e>0$，$e\neq 1$ ですから，定数 e を底とする対数 $\log_e X$ ($X>0$) を考えることができます．正の実数 b に対して，定数 e を底とする対数関数 $\log_e x$ の b における微分係数は，定理 2.9 より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(b+h)-\log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b}\ .$$

このように，定数 e を底とする対数関数の微分係数は簡単な式で表されます．

定数 e を底とする対数を自然対数といいます．解析学では自然対数をよく用いるので，自然対数 $\log_e X$ を $\ln X$ と略記します[7]．つまり，正の実数 X に対して，$\ln X$ は自然対数 $\log_e X$ を意味します：

$$\ln X = \log_e X\ .$$

---

[6] 話を簡単にするために自然対数の底を $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ と定義しましたが，自然対数の底 e の一般的な定義は別にあります．第 4 章の補遺 4 で述べます．

[7] 正の実数 X に対して，数学では自然対数 $\log_e X$ を $\log X$ と略記します．また，工学では常用対数 $\log_{10} X$ を $\log X$ と略記することがあります．ですから，$\log X$ は自然対数 $\log_e X$ を意味するときと常用対数 $\log_{10} X$ を意味するときとがあります．紛らわしいので，本書では自然対数 $\log_e X$ を $\ln X$ と略記します．