§3.1 導関数

例解 関数 φ を $\varphi(x)=x^3$ とおきます．定理 2.5.1 より，各実数 x における φ の微分係数は $3x^2$ です．ですから，各実数 x に対して，x における φ の微分係数 $3x^2$ は唯一つに決まります．x の値をいろいろ変化させると，

x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を対応させる 関数

ができます．この関数を φ の導関数といい，φ' と書き表します．φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数なので，$\varphi'(x)=3x^2$ です．ですから例えば次のようになります：

2 に対する導関数 φ' の値 $\varphi'(2)=12$ は 2 における φ の微分係数である；

5 に対する導関数 φ' の値 $\varphi'(5)=75$ は 5 における φ の微分係数である．

このように，導関数とは微分係数を求めるための関数です． 終

一般的に述べます．関数 f の定義域の実数 x に対して，x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は（あるならば）唯一つに決まります．従って，

x に対して x における f の微分係数を対応させる 関数

を定義できます．この関数を f の**導関数** (derived function) といいます．

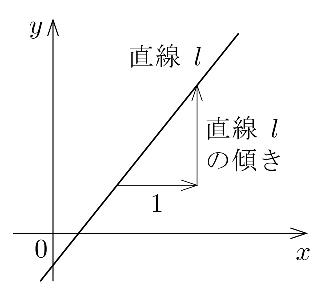
定義 関数 f の導関数とは，f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を対応させる関数のことである[1]．関数 f の導関数を f' と書き表す．

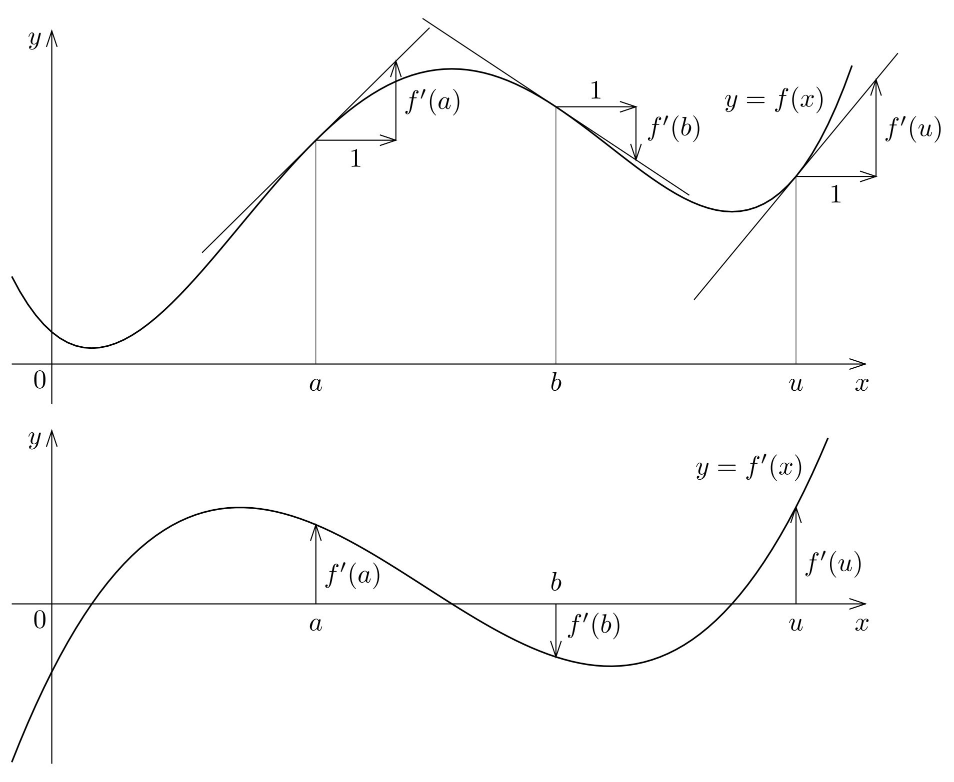
関数 f の導関数 f' とは次のような関数です：実数 x に対する値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ である，つまり

$$f'(x) = (\ f\ \text{の}\ x\ \text{における微分係数}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ .$$

関数 f の導関数を求めることを，f を**微分する** (differentiate) といいます．

関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は x における f の微分係数ですから，f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きです（2.6 節参照）．xy 座標平面における直線の傾きは，右図のように，x 座標を 1 だけ大きくするとき y 座標が大きくなる量です．このことより，f のグラフと導関数 f' のグラフとは例えば次のようになります．





微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を，$\dfrac{d}{dx}f(x)$[2]，$\dfrac{df(x)}{dx}$ などとも書き表します；

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\ .$$

つまり，変数 x の関数 $f(x)$ に対して，$\dfrac{d}{dx}f(x)$[3] は $f(x)$ を微分した結果を表します．例えば，関数 φ を $\varphi(x)=x^3$ とおくとき，$\varphi'(x)=3x^2$ なので，

$$\frac{d}{dx}x^3 = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \varphi'(x) = 3x^2\ .$$

$\dfrac{d}{dx}$ は変数 x の関数として微分することを意味します．例えば，変数 t の関数として微分するときは $\dfrac{d}{dt}$ と書き表します：

$$\frac{d}{dt}t^3 = 3t^2\ .$$

正の整数 n に対して，冪関数 x^n の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数で，定理 2.5.1 より

x における冪関数 x^n の微分係数は $\displaystyle\lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x}=nx^{n-1}$

ですから，次の公式が成り立ちます．

定理 3.1.1 正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}\ .$$

この定理より例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2\ , \qquad \frac{d}{dt}t^5 = 5t^4\ , \qquad \frac{d}{dy}y^2 = 2y^1 = 2y\ .$$

特に，$x=x^1$ なので，

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x^1 = 1x^0 = 1\ .$$

例 4 を指数とする冪関数 x^4 を $f(x)$ とおきます：$f(x)=x^4$．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}x^4=4x^3$．関数 $f(x)$ の -2 における微分係数は $f'(x)=4(-2)^3=-32$． 終

問題 3.1.1 5 を指数とする冪関数 x^5 を $f(x)$ とおきます．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の -2 における微分係数を求めなさい．

各実数 x に対して，x における定数関数の微分係数は 0 です（定理 2.5.2）．従って，変数 x に無関係な定数 k に対して，$f(x)=k$ となる定数関数 f の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0\ .$$

定理 3.1.2 変数 x に無関係な定数 k に対して，定数関数 k の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = 0\ .$$

この定理より，例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}6 = 0\ , \qquad \frac{d}{dt}5^3 = 0\ , \qquad \frac{d}{dy}\ln 7 = 0\ .$$

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数で，定理 2.8 より，各実数 x に対して

x における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x$

ですから，$\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ です．同様に，余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数で，各実数 x に対して

x における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x$

ですから，$\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ です．

定理 3.1.3 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の導関数は，それぞれ，

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\ , \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\ .$$

例 正弦関数 $\sin x$ を $f(x)$ とおきます：$f(x)=\sin x$．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$．関数 $f(x)$ の $\dfrac{2\pi}{3}$ における微分係数は

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}\ .$$ 終

例 余弦関数 $\cos x$ を $g(x)$ とおきます：$g(x)=\sin x$．関数 $g(x)$ の導関数は $g'(x)=\dfrac{d}{dx}g(x)=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$．関数 $g(x)$ の $\dfrac{5\pi}{6}$ における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ .$$ 終

問題 3.1.2 正弦関数 $\sin x$ を $g(x)$ とおきます．関数 $g(x)$ の導関数を求めて，$g(x)$ の $\dfrac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めなさい．

問題 3.1.3 余弦関数 $\cos x$ を $f(x)$ とおきます．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の $\dfrac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めなさい．

定数 a について $a>0$，$a\neq 0$ とします．定理 2.9 より，$x>0$ である各実数 x について，

x における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{\log_a e}{x}$

ですから，

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x}\ ;$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}\ ,$$

よって

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a}\ .$$

特に $a=e$ のときは，$\ln e=\log_e e=1$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x\ln e} = \frac{1}{x}\ .$$

定理 3.1.4 定数 a について $a>0$，$a\neq 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a} \quad (\ x>0\ )\ .$$

特に自然対数の対数関数 $\ln x=\log_e x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad (\ x>0\ )\ .$$

例 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を $f(x)$ とおきます：$f(x)=\log_3 x$ （ $x>0$ ）．関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d}{dx}\log_3 x=\dfrac{\log_3 e}{x}$．関数 $f(x)$ の 5 における微分係数は $f'(5)=\dfrac{\log_3 e}{5}$． 終

問題 3.1.4 5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を $f(x)$ とおきます．関数 $f(x)$ の導関数を求めて，$f(x)$ の 7 における微分係数を求めなさい．

関数 $f(x)$ の導関数の表現 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ において，$\dfrac{d}{dx}$ は $f(x)$ を変数 x の関数として微分することを意味します．例えば，変数 y の関数 y^4 の導関数は $\dfrac{d}{dy}y^4$ と，変数 t の関数 $\sin t$ の導関数は $\dfrac{d}{dt}\sin t$ と書き表します：

$$\frac{d}{dy}y^4 = 4y^3\ , \qquad \frac{d}{dt}\sin t = \cos t\ .$$

関数 f について，変数 x の変化に対する $f(x)$ の変化を考えます．x の値の変化量を x の増分 (increment) といい Δx[4] と書き表します．x の増分 Δx に対して，x が $x+\Delta x$ に変化すると[5]，$f(x)$ は $f(x+\Delta x)$ に変化します．このとき，$f(x)$ の変化量は $f(x+\Delta x)-f(x)$ です[6]．これを，x の増分 Δx に対する $f(x)$ の増分といい，$\Delta f(x)$ と書き表します：

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x)-f(x)\ .$$

$f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ を x の増分 Δx で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ ;$$

これは関数 f の平均変化率です．ここで $\Delta x\to 0$ とします：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ .$$

変数 Δx を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ ;$$

これは関数 f の微分係数です：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)\ .$$

変数 x, y 及び関数 f について $y=f(x)$ のとき，$\Delta y=\Delta f(x)$ ですから，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

これを $\dfrac{dy}{dx}$[7]，y' などと書き表すこともあります．結局，$y=f(x)$ のときは，

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)\ .$$

――― 導関数の値の表記について

例えば，関数 f を $f(x)=x^3$ とおきます．このとき

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2\ .$$

等式 $f'(x)=3x^2$ の両辺の x に 2 を代入すると $f'(2)=3\cdot 2^2=12$．しかし，$\dfrac{d}{dx}x^3$ の $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x で微分することを意味するので，この x に定数 2 を代入することはできません．そこで，関数 x^3 の導関数 $\dfrac{d}{dx}x^3$ の $x=2$ のときの値を $\left(\dfrac{d}{dx}x^3\right)_{x=2}$ と書き表します．この記法によると，

$$f'(2) = \left(\frac{d}{dx}x^3\right)_{x=2} = \left(3x^2\right)_{x=2} = 3\cdot 2^2 = 12\ .$$

---

1) 関数 f の導関数の定義域は，通常，x において f が微分可能であるような実数 x の全体です．

2) $\dfrac{d}{dx}$ は“ディー ディーエックス”と読みます．

3) $\dfrac{d}{dx}f(x)$ はこれでひとまとまりの表現であり，$\dfrac{d}{dx}$ だけでは意味がありません．

4) Δx はこれで 1 つの変数です．Δ と x との積ではありません．

5) x の増分といっても x の値が増加するとは限りません．$\Delta x<0$ のとき x の値は減少します．

6) 変化量は“（変化した後の量）－（変化する前の量）”です

7) $\dfrac{dy}{dx}$ は“ディーワイ ディーエックス”と読みます．$\dfrac{dy}{dx}$ はこれでひとまとまりの表現であり，分数ではありません．