

§ 3.1 導関数

例解 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ と定めます。定理 2.5.1 より、各実数 x における φ の微分係数は $3x^2$ です。ですから、各実数 x に対して、 x における φ の微分係数 $3x^2$ は唯一つに決まります。実数を表す変数 x の値をいろいろ変化させると、

x に対して x における φ の微分係数 $3x^2$ を対応させる関数ができます。この関数を φ の導関数といい、 φ' と書き表します。 φ の導関数 φ' の値 $\varphi'(x)$ は x における φ の微分係数なので、 $\varphi'(x) = 3x^2$ です。ですから例えば次のようになります：

2 に対する導関数 φ' の値 $\varphi'(2) = 12$ は 2 における φ の微分係数である；

5 に対する導関数 φ' の値 $\varphi'(5) = 75$ は 5 における φ の微分係数である。

このように、導関数とは微分係数を求めるための関数です。 終

一般的に述べます。関数 f の定義域の実数 x に対して、 x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ は (あるならば) 唯一つに決まります。従って、 x に対して x における f の微分係数を対応させる関数を定義できます。この関数を f の導関数 (derived function) といいます。

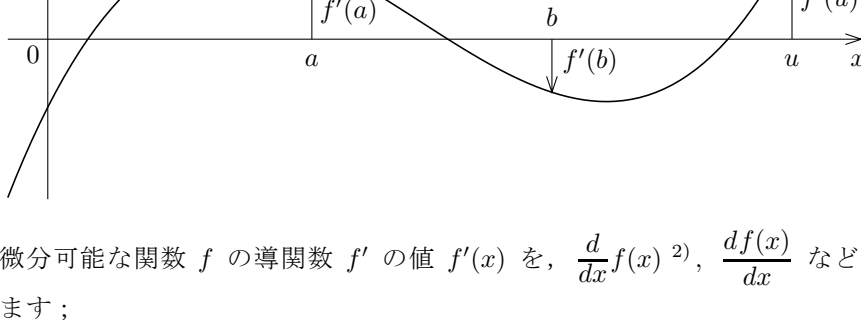
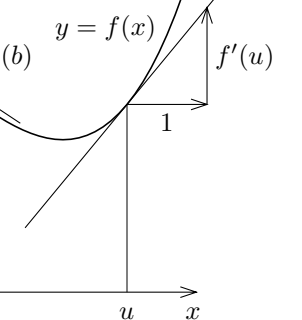
定義 関数 f の導関数とは、 f の定義域の実数 x に対して x における f の微分係数を対応させる関数のことである¹⁾。関数 f の導関数を f' と書き表す。

関数 f の導関数 f' とは次のような関数です：実数 x に対する値 $f'(x)$ は x における f の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ である、つまり

$$f'(x) = [f \text{ の } x \text{ における微分係数}] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

関数 f の導関数を求めることを、 f を微分する (differentiate) といいます。

関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ は x における f の微分係数ですから、 f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きです (2.6 節参照)。 xy 座標平面における直線の傾きは、右図のように、 x 座標を 1 だけ大きくするとき y 座標が大きくなる量です。このことより、 f のグラフと導関数 f' のグラフとは例えば次のようになります。



微分可能な関数 f の導関数 f' の値 $f'(x)$ を、 $\frac{d}{dx}f(x)$ ²⁾、 $\frac{df(x)}{dx}$ などとも書き表します；

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

つまり、変数 x の関数 $f(x)$ に対して、 $\frac{d}{dx}f(x)$ ³⁾ は $f(x)$ を微分した結果を表します。例えば、関数 φ を $\varphi(x) = x^3$ とおくと、 $\varphi'(x) = 3x^2$ なので、

$$\frac{d}{dx}x^3 = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \varphi'(x) = 3x^2.$$

$\frac{d}{dx}$ は変数 x の関数として微分することを意味します。例えば、変数 t の関数として微分するときは $\frac{d}{dt}$ と書き表します：

$$\frac{d}{dt}t^3 = 3t^2.$$

正の整数 n に対して、冪関数 x^n の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ の値は x^n の微分係数で、定理 2.5.1 より

$$x \text{ における冪関数 } x^n \text{ の微分係数は } \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1}$$

ですから、次の公式が成り立ちます。

定理 3.1.1 正の整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

この定理より例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dt}t^5 = 5t^4, \quad \frac{d}{dy}y^2 = 2y^1 = 2y.$$

特に、 $x = x^1$ なので、

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x^1 = 1x^0 = 1.$$

例 4 を指数とする冪関数 x^4 を $f(x)$ とおきます： $f(x) = x^4$ 。関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$ 。関数 $f(x)$ の -2 における微分係数は $f'(x) = 4(-2)^3 = -32$ 。 終

問題 3.1.1 5 を指数とする冪関数 x^5 を $f(x)$ とおきます。関数 $f(x)$ の導関数を求めて、 $f(x)$ の -2 における微分係数を求めなさい。

各実数 x に対して、 x における定数関数の微分係数は 0 です (定理 2.5.2)。従って、変数 x に無関係な定数 k に対して、 $f(x) = k$ となる定数関数 f の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0.$$

定理 3.1.2 変数 x に無関係な定数 k に対して、定数関数 k の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = 0.$$

この定理より、例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}6 = 0, \quad \frac{d}{dt}5^3 = 0, \quad \frac{d}{dy}\ln 7 = 0.$$

正弦関数 $\sin x$ の導関数 $\frac{d}{dx}\sin x$ の値は $\sin x$ の微分係数で、定理 2.8 より、各実数 x に対して

$$x \text{ における正弦関数 } \sin x \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

ですから、 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ です。同様に、余弦関数 $\cos x$ の導関数 $\frac{d}{dx}\cos x$ の値は $\cos x$ の微分係数で、各実数 x に対して

$$x \text{ における余弦関数 } \cos x \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

ですから、 $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ です。

定理 3.1.3 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の導関数は、それぞれ、

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

例 正弦関数 $\sin x$ を $f(x)$ とおきます： $f(x) = \sin x$ 。関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ 。関数 $f(x)$ の $\frac{2\pi}{3}$ における微分係数は $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ 。 終

例 余弦関数 $\cos x$ を $g(x)$ とおきます： $g(x) = \cos x$ 。関数 $g(x)$ の導関数は $g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ 。関数 $g(x)$ の $\frac{5\pi}{6}$ における微分係数は $g'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ 。 終

問題 3.1.2 正弦関数 $\sin x$ を $g(x)$ とおきます。関数 $g(x)$ の導関数を求めて、 $g(x)$ の $\frac{5\pi}{3}$ における微分係数を求めなさい。

問題 3.1.3 余弦関数 $\cos x$ を $f(x)$ とおきます。関数 $f(x)$ の導関数を求めて、 $f(x)$ の $\frac{11\pi}{6}$ における微分係数を求めなさい。

定数 a について $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とします。定理 2.9 より、 $x > 0$ である各実数 x について、

$$x \text{ における対数関数 } \log_a x \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x}$$

ですから、

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x};$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a},$$

よって

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

特に $a = e$ のときは、 $\ln e = \log_e e = 1$ なので、

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

定理 3.1.4 定数 a について $a > 0$ 、 $a \neq 1$ とする。対数関数 $\log_a x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0).$$

特に自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

例 3 を底とする対数関数 $\log_3 x$ を $f(x)$ とおきます： $f(x) = \log_3 x$ ($x > 0$)。関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\log_3 x = \frac{\log_3 e}{x}$ 。関数 $f(x)$ の 5 における微分係数は $f'(5) = \frac{\log_3 e}{5}$ 。 終

問題 3.1.4 5 を底とする対数関数 $\log_5 x$ を $f(x)$ とおきます。関数 $f(x)$ の導関数を求めて、 $f(x)$ の 7 における微分係数を求めなさい。

関数 $f(x)$ の導関数の表現 $\frac{d}{dx}f(x)$ において、 $\frac{d}{dx}$ は $f(x)$ を変数 x の関数として微分することを意味します。例えば、変数 y の関数 y^4 の導関数は $\frac{d}{dy}y^4$ と、変数 t の関数 $\sin t$ の導関数は $\frac{d}{dt}\sin t$ と書き表します：

$$\frac{d}{dy}y^4 = 4y^3, \quad \frac{d}{dt}\sin t = \cos t.$$

関数 f について、変数 x の変化に対する $f(x)$ の変化を考えます。 x の値の変化量を x の増分 (increment) といい Δx ⁴⁾ と書き表します。 x の増分 Δx に対して、 x が $x + \Delta x$ に変化すると⁵⁾、 $f(x)$ は $f(x + \Delta x)$ に変化します。このとき、 $f(x)$ の変化量は $f(x + \Delta x) - f(x)$ です⁶⁾。これを、 x の増分 Δx に対する $f(x)$ の増分といい、 $\Delta f(x)$ と書き表します：

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

$f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ を x の増分 Δx で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

これは関数 f の平均変化率です。ここで $\Delta x \rightarrow 0$ とします：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

変数 Δx を変数 h で置き換えると

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h};$$

これは関数 f の微分係数です：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x).$$

変数 x, y 及び関数 f について $y = f(x)$ のとき、 $\Delta y = \Delta f(x)$ ですから、

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

これを $\frac{dy}{dx}$ ⁷⁾、 y' などと書き表すこともあります。結局、 $y = f(x)$ のときは、

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x).$$

————— 導関数の値の表記について

例えば、関数 f を $f(x) = x^3$ とおきます。このとき

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2.$$

等式 $f'(x) = 3x^2$ の両辺の x に 2 を代入すると $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ 。しかし、 $\frac{d}{dx}x^3$ の $\frac{d}{dx}$ は変数 x で微分することを意味するので、この x に定数 2 を代入することはできません。そこで、関数 x^3 の導関数 $\frac{d}{dx}x^3$ の $x = 2$ のときの値を $\left(\frac{d}{dx}x^3\right)_{x=2}$ と書き表します。この記法によると、

$$f'(2) = \left(\frac{d}{dx}x^3\right)_{x=2} = (3x^2)_{x=2} = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

¹⁾ 関数 f の導関数の定義域は、通常、 x において f が微分可能であるような実数 x の全体です。

²⁾ $\frac{d}{dx}$ は“ディー ディーエックス”と読みます。

³⁾ $\frac{d}{dx}f(x)$ はこれでひとまとまりの表現であり、 $\frac{d}{dx}$ だけでは意味がありません。

⁴⁾ Δx はこれで 1 つの変数です。 Δ と x との積ではありません。

⁵⁾ x の増分といっても x の値が増加するとは限りません。 $\Delta x < 0$ のとき x の値は減少します。

⁶⁾ 変化量は“[変化した後の量] - [変化する前の量]”です

⁷⁾ $\frac{dy}{dx}$ は“ディーワイ ディーエックス”と読みます。 $\frac{dy}{dx}$ はこれでひとまとまりの表現であり、分数ではありません。