

### §3.1 導関数

**例解** 関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = x^3$  とおきます。定理 2.5.1 より、各実数  $x$  における  $\varphi$  の微分係数は  $3x^2$  です。ですから、各実数  $x$  に対して、 $x$  における  $\varphi$  の微分係数  $3x^2$  は唯一つに決まります。 $x$  の値をいろいろ変化させると、 $x$  に対して  $x$  における  $\varphi$  の微分係数  $3x^2$  を対応させる関数ができます。この関数を  $\varphi$  の導関数といい、 $\varphi'$  と書き表します。 $\varphi$  の導関数  $\varphi'$  の値  $\varphi'(x)$  は  $x$  における  $\varphi$  の微分係数なので、 $\varphi'(x) = 3x^2$  です。ですから例えば次のようになります：

- 2 に対する導関数  $\varphi'$  の値  $\varphi'(2) = 12$  は 2 における  $\varphi$  の微分係数である；
- 5 に対する導関数  $\varphi'$  の値  $\varphi'(5) = 75$  は 5 における  $\varphi$  の微分係数である。

このように、導関数とは微分係数を求めるための関数です。 [終]

一般的に述べます。関数  $f$  の定義域の実数  $x$  に対して、 $x$  における  $f$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  は (あるならば) 唯一つに決まります。従って、 $x$  に対して  $x$  における  $f$  の微分係数を対応させる関数を定義できます。この関数を  $f$  の導関数 (derived function) といいます。

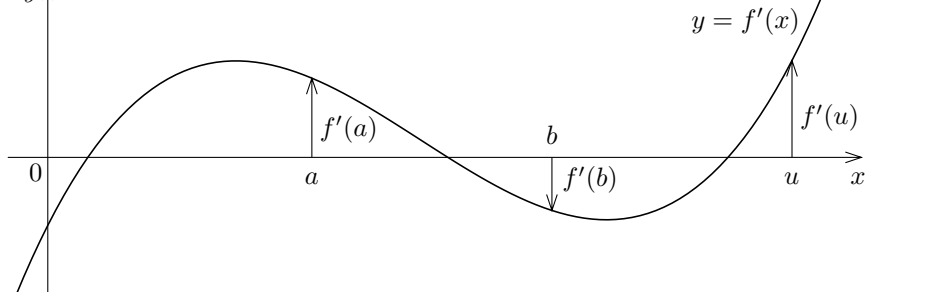
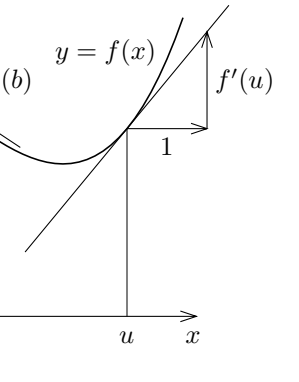
**定義** 関数  $f$  の導関数とは、 $f$  の定義域の実数  $x$  に対して  $x$  における  $f$  の微分係数を対応させる関数のことである<sup>1)</sup>。関数  $f$  の導関数を  $f'$  と書き表す。

関数  $f$  の導関数  $f'$  とは次のような関数です：実数  $x$  に対する値  $f'(x)$  は  $x$  における  $f$  の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  である、つまり

$$f'(x) = (f \text{ の } x \text{ における微分係数}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

関数  $f$  の導関数を求めることを、 $f$  を微分する (differentiate) といいます。

関数  $f$  の導関数  $f'$  の値  $f'(x)$  は  $x$  における  $f$  の微分係数ですから、 $f$  のグラフの点  $(x, f(x))$  における接線の傾きです (2.6 節参照)。 $xy$  座標平面における直線の傾きは、右図のように、 $x$  座標を 1 だけ大きくするとき  $y$  座標が大きくなる量です。このことより、 $f$  のグラフと導関数  $f'$  のグラフとは例えば次のようになります。



微分可能な関数  $f$  の導関数  $f'$  の値  $f'(x)$  を、 $\frac{d}{dx}f(x)$ <sup>2)</sup>、 $\frac{df(x)}{dx}$  などとも書き表します；

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

つまり、変数  $x$  の関数  $f(x)$  に対して、 $\frac{d}{dx}f(x)$ <sup>3)</sup> は  $f(x)$  を微分した結果を表します。例えば、関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = x^3$  とおくと、 $\varphi'(x) = 3x^2$  なので、

$$\frac{d}{dx}x^3 = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \varphi'(x) = 3x^2.$$

$\frac{d}{dx}$  は変数  $x$  の関数として微分することを意味します。例えば、変数  $t$  の関数として微分するときは  $\frac{d}{dt}$  と書き表します：

$$\frac{d}{dt}t^3 = 3t^2.$$

正の整数  $n$  に対して、冪関数  $x^n$  の導関数  $\frac{d}{dx}x^n$  の値は  $x^n$  の微分係数で、定理 2.5.1 より

$$x \text{ における冪関数 } x^n \text{ の微分係数は } \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} = nx^{n-1}$$

ですから、次の公式が成り立ちます。

**定理 3.1.1** 正の整数  $n$  を指数とする冪関数  $x^n$  の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

この定理より例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2, \quad \frac{d}{dt}t^5 = 5t^4, \quad \frac{d}{dy}y^2 = 2y^1 = 2y.$$

特に、 $x = x^1$  なので、

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}x^1 = 1x^0 = 1.$$

**例** 4 を指数とする冪関数  $x^4$  を  $f(x)$  とおきます： $f(x) = x^4$ 。関数  $f(x)$  の導関数は  $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$ 。関数  $f(x)$  の  $-2$  における微分係数は  $f'(-2) = 4(-2)^3 = -32$ 。 [終]

**問題 3.1.1** 5 を指数とする冪関数  $x^5$  を  $f(x)$  とおきます。関数  $f(x)$  の導関数を求めて、 $f(x)$  の  $-2$  における微分係数を求めなさい。

各実数  $x$  に対して、 $x$  における定数関数の微分係数は 0 です (定理 2.5.2)。従って、変数  $x$  に無関係な定数  $k$  に対して、 $f(x) = k$  となる定数関数  $f$  の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = 0.$$

**定理 3.1.2** 変数  $x$  に無関係な定数  $k$  に対して、定数関数  $k$  の導関数は

$$\frac{d}{dx}k = 0.$$

この定理より、例えば次のようになります：

$$\frac{d}{dx}6 = 0, \quad \frac{d}{dt}5^3 = 0, \quad \frac{d}{dy}\ln 7 = 0.$$

正弦関数  $\sin x$  の導関数  $\frac{d}{dx}\sin x$  の値は  $\sin x$  の微分係数で、定理 2.8 より、各実数  $x$  に対して

$$x \text{ における正弦関数 } \sin x \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

ですから、 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$  です。同様に、余弦関数  $\cos x$  の導関数  $\frac{d}{dx}\cos x$  の値は  $\cos x$  の微分係数で、各実数  $x$  に対して

$$x \text{ における余弦関数 } \cos x \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

ですから、 $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$  です。

**定理 3.1.3** 正弦関数  $\sin x$  及び余弦関数  $\cos x$  の導関数は、それぞれ、

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

**例** 正弦関数  $\sin x$  を  $f(x)$  とおきます： $f(x) = \sin x$ 。関数  $f(x)$  の導関数は  $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ 。関数  $f(x)$  の  $\frac{2\pi}{3}$  における微分係数は

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$
 [終]

**例** 余弦関数  $\cos x$  を  $g(x)$  とおきます： $g(x) = \sin x$ 。関数  $g(x)$  の導関数は  $g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ 。関数  $g(x)$  の  $\frac{5\pi}{6}$  における微分係数は

$$g'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$
 [終]

**問題 3.1.2** 正弦関数  $\sin x$  を  $g(x)$  とおきます。関数  $g(x)$  の導関数を求めて、 $g(x)$  の  $\frac{5\pi}{3}$  における微分係数を求めなさい。

**問題 3.1.3** 余弦関数  $\cos x$  を  $f(x)$  とおきます。関数  $f(x)$  の導関数を求めて、 $f(x)$  の  $\frac{11\pi}{6}$  における微分係数を求めなさい。

定数  $a$  について  $a > 0$ 、 $a \neq 1$  とします。定理 2.9 より、 $x > 0$  である各実数  $x$  について、

$$x \text{ における対数関数 } \log_a x \text{ の微分係数は } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{\log_a e}{x}$$

ですから、

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x};$$

対数の底の変換公式より

$$\log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a},$$

よって

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

特に  $a = e$  のときは、 $\ln e = \log_e e = 1$  なので、

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

**定理 3.1.4** 定数  $a$  について  $a > 0$ 、 $a \neq 1$  とする。対数関数  $\log_a x$  の導関数は

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a} \quad (x > 0).$$

特に自然対数の対数関数  $\ln x = \log_e x$  の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

**例** 3 を底とする対数関数  $\log_3 x$  を  $f(x)$  とおきます： $f(x) = \log_3 x$  ( $x > 0$ )。関数  $f(x)$  の導関数は  $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\log_3 x = \frac{\log_3 e}{x}$ 。関数  $f(x)$  の 5 における微分係数は  $f'(5) = \frac{\log_3 e}{5}$ 。 [終]

**問題 3.1.4** 5 を底とする対数関数  $\log_5 x$  を  $f(x)$  とおきます。関数  $f(x)$  の導関数を求めて、 $f(x)$  の 7 における微分係数を求めなさい。

関数  $f(x)$  の導関数の表現  $\frac{d}{dx}f(x)$  において、 $\frac{d}{dx}$  は  $f(x)$  を変数  $x$  の関数として微分することを意味します。例えば、変数  $y$  の関数  $y^4$  の導関数は  $\frac{d}{dy}y^4$  と、変数  $t$  の関数  $\sin t$  の導関数は  $\frac{d}{dt}\sin t$  と書き表します：

$$\frac{d}{dy}y^4 = 4y^3, \quad \frac{d}{dt}\sin t = \cos t.$$

関数  $f$  について、変数  $x$  の変化に対する  $f(x)$  の変化を考えます。 $x$  の値の変化量を  $x$  の増分 (increment) といい  $\Delta x$ <sup>4)</sup> と書き表します。 $x$  の増分  $\Delta x$  に対して、 $x$  が  $x + \Delta x$  に変化すると<sup>5)</sup>、 $f(x)$  は  $f(x + \Delta x)$  に変化します。このとき、 $f(x)$  の変化量は  $f(x + \Delta x) - f(x)$  です<sup>6)</sup>。これを、 $x$  の増分  $\Delta x$  に対する  $f(x)$  の増分といい、 $\Delta f(x)$  と書き表します：

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

$f(x)$  の増分  $\Delta f(x)$  を  $x$  の増分  $\Delta x$  で割ると

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

これは関数  $f$  の平均変化率です。ここで  $\Delta x \rightarrow 0$  とします：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

変数  $\Delta x$  を変数  $h$  で置き換えると

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h};$$

これは関数  $f$  の微分係数です：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x) = \frac{d}{dx}f(x).$$

変数  $x, y$  及び関数  $f$  について  $y = f(x)$  のとき、 $\Delta y = \Delta f(x)$  ですから、

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

これを  $\frac{dy}{dx}$ <sup>7)</sup>、 $y'$  などと書き表すこともあります。結局、 $y = f(x)$  のときは、

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x).$$

————— 導関数の値の表記について

例えば、関数  $f$  を  $f(x) = x^3$  とおきます。このとき

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2.$$

等式  $f'(x) = 3x^2$  の両辺の  $x$  に 2 を代入すると  $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ 。しかし、 $\frac{d}{dx}x^3$  の  $\frac{d}{dx}$  は変数  $x$  で微分することを意味するので、この  $x$  に定数 2 を代入することはできません。そこで、関数  $x^3$  の導関数  $\frac{d}{dx}x^3$  の  $x = 2$  のときの値を  $\left(\frac{d}{dx}x^3\right)_{x=2}$  と書き表します。この記法によると、

$$f'(2) = \left(\frac{d}{dx}x^3\right)_{x=2} = (3x^2)_{x=2} = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

<sup>1)</sup> 関数  $f$  の導関数の定義域は、通常、 $x$  において  $f$  が微分可能であるような実数  $x$  の全体です。  
<sup>2)</sup>  $\frac{d}{dx}$  は “ディー ディーエックス” と読みます。  
<sup>3)</sup>  $\frac{d}{dx}f(x)$  はこれでひとまとまりの表現であり、 $\frac{d}{dx}$  だけでは意味がありません。  
<sup>4)</sup>  $\Delta x$  はこれで 1 つの変数です。  $\Delta$  と  $x$  との積ではありません。  
<sup>5)</sup>  $x$  の増分といっても  $x$  の値が増加するとは限りません。  $\Delta x < 0$  のとき  $x$  の値は減少します。  
<sup>6)</sup> 変化量は “(変化した後の量) - (変化する前の量)” です  
<sup>7)</sup>  $\frac{dy}{dx}$  は “ディーワイディーエックス” と読みます。  $\frac{dy}{dx}$  はこれでひとまとまりの表現であり、分数ではありません。