§3.2　関数の定数倍・和・差の微分法

証明は後にしてまず定理だけを述べます.

定理 3.2.1　微分可能な関数 $f(x)$ 及び変数 x と無関係な定数 k に対して，関数 $kf(x)$ は微分可能であり,

$$\frac{d}{dx}\{kf(x)\} = k\frac{d}{dx}f(x) .$$

定理 3.2.2　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，関数 $f(x)+g(x)$ と $f(x)-g(x)$ とは微分可能であり,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\pm g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \quad (\text{複号同順}) .$$

例題　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{\sin x}{2}$ と定める．f の導関数 f' を求める.

$\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ なので，定理 3.2.1 より

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\sin x=\frac{1}{2}\cos x$$
$$=\frac{\cos x}{2} .$$

終

問題 3.2.1　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\dfrac{5\ln x}{3}$ と定めます．g の導関数 g' を求めなさい.

例題　変数 x の関数 $y=x^3+\ln x$ を微分する.

$\dfrac{d}{dx}x^3=3x^2$ ，$\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$ なので，定理 3.2.2 より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3+\ln x)=\frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}\ln x=3x^2+\frac{1}{x} .$$

終

問題 3.2.2　変数 x の関数 $y=x^2+\cos x$ を微分しなさい.

例題　変数の u の関数 $3u^2-5u+7$ を微分する.

$$\frac{d}{du}(3u^2-5u+7)=\frac{d}{du}(3u^2)-\frac{d}{du}(5u)+\frac{d}{du}7=3\frac{d}{du}u^2-5\frac{d}{du}u+0$$
$$=3\cdot 2u-5\cdot 1=6u-5 .$$

終

問題 3.2.3　変数 y の関数 $2y^3-7y+4$ を微分しなさい.

例題　実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{t^3+5\cos t}{4}$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求める.

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\frac{x^3+5\cos x}{4}=\frac{1}{4}\frac{d}{dx}(x^3+5\cos x)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{d}{dx}x^3+5\frac{d}{dx}\cos x\right)=\frac{1}{4}\{3x^2+5(-\sin x)\}$$
$$=\frac{3x^2-5\sin x}{4} .$$

終

問題 3.2.4　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=\dfrac{4\sin x-3x^2}{5}$ と定めます．関数 φ の導関数 φ' を求めなさい.

定理 3.2.1 及び 3.2.2 を証明します．次のことが基本になります：関数 φ について，変数 x の増分 $\varDelta x$ に対する $\varphi(x)$ の増分 $\varDelta\varphi(x)$ は

$$\varDelta\varphi(x) = \varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x) ;$$

関数 $\varphi(x)$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\varphi(x)}{\varDelta x} .$$

まず定理 3.2.1 を証明します．変数 x と無関係な定数 k 及び微分可能な関数 f 及び x の増分 $\varDelta x$ に対して $\dfrac{d}{dx}\{kf(x)\}=\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta\{kf(x)\}}{\varDelta x}$ を計算します．x の増分 $\varDelta x$ に対する $f(x)$ の増分 $\varDelta f(x)$ は

$$\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x)-f(x) .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$kf(x)$ は $kf(x+\varDelta x)$ に変化する（k は定数なので変化しない）ので，その増分 $\varDelta\{kf(x)\}$ は

$$\varDelta\{kf(x)\} = kf(x+\varDelta x)-kf(x) = k\{f(x+\varDelta x)-f(x)\} = k\varDelta f(x) .$$

よって

$$\frac{\varDelta\{kf(x)\}}{\varDelta x} = \frac{k\varDelta f(x)}{\varDelta x} = k\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} .$$

関数 $f(x)$ は微分可能なので $\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，更に定数 k は $\varDelta x$ と無関係なので,

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{kf(x)\}}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{k\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\right\} = k\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} = k\frac{d}{dx}f(x) ,$$

故に

$$\frac{d}{dx}\{kf(x)\} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{kf(x)\}}{\varDelta x} = k\frac{d}{dx}f(x) .$$

こうして定理 3.2.1 が証明されました.

次に定理 3.2.2 を証明します．微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ 及び x の増分 $\varDelta x$ に対して $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x}$ を計算します．x の増分 $\varDelta x$ に対する $f(x)$ の増分 $\varDelta f(x)$ 及び $g(x)$ の増分 $\varDelta g(x)$ は,

$$\varDelta f(x) = f(x+\varDelta x)-f(x) , \qquad \varDelta g(x) = g(x+\varDelta x)-g(x) .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき，$f(x)+g(x)$ は $f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\varDelta\{f(x)+g(x)\} = f(x+\varDelta x)+g(x+\varDelta x)-\{f(x)+g(x)\}$$
$$= f(x+\varDelta x)-f(x)+g(x+\varDelta x)-g(x)$$
$$= \varDelta f(x)+\varDelta g(x) .$$

よって

$$\frac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)+\varDelta g(x)}{\varDelta x} = \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}+\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能なので，$\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，$\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}=\dfrac{d}{dx}g(x)$ ，よって

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x} = \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}+\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\right\} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}+\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}$$
$$= \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x) ,$$

故に

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)+g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x) .$$

同様に $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$ を計算すると

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x) .$$

こうして定理 3.2.2 が証明されました.