

§ 3.2 関数の定数倍・和・差の微分法

証明は後にしてまず定理だけを述べます。

定理 3.2.1 微分可能な関数 $f(x)$ 及び変数 x と無関係な定数 k に対して、関数 $kf(x)$ は微分可能であり、

$$\frac{d}{dx}\{kf(x)\} = k \frac{d}{dx}f(x).$$

定理 3.2.2 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して、関数 $f(x)+g(x)$ と $f(x)-g(x)$ とは微分可能であり、

$$\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x) \quad (\text{複号同順}).$$

例題 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ と定める。 f の導関数 f' を求める。

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ なので、定理 3.2.1 より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \sin x \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \sin x = \frac{1}{2} \cos x \\ &= \frac{\cos x}{2}. \end{aligned}$$

終

問題 3.2.1 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \frac{5 \ln x}{3}$ と定めます。 g の導関数 g' を求めなさい。

例題 変数 x の関数 $y = x^3 + \ln x$ を微分する。

$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$, $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ なので、定理 3.2.2 より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + \ln x) = \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx} \ln x = 3x^2 + \frac{1}{x}.$$

終

問題 3.2.2 変数 x の関数 $y = x^2 + \cos x$ を微分しなさい。

例題 変数の u の関数 $3u^2 - 5u + 7$ を微分する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(3u^2 - 5u + 7) &= \frac{d}{du}(3u^2) - \frac{d}{du}(5u) + \frac{d}{du}7 = 3 \frac{d}{du}u^2 - 5 \frac{d}{du}u + 0 \\ &= 3 \cdot 2u - 5 \cdot 1 = 6u - 5. \end{aligned}$$

終

問題 3.2.3 変数 y の関数 $2y^3 - 7y + 4$ を微分しなさい。

例題 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{t^3 + 5 \cos t}{4}$ と定める。関数 ψ の導関数 ψ' を求める。

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^3 + 5 \cos x}{4} = \frac{1}{4} \frac{d}{dx}(x^3 + 5 \cos x) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx}x^3 + 5 \frac{d}{dx} \cos x \right) = \frac{1}{4} \{3x^2 + 5(-\sin x)\} \\ &= \frac{3x^2 - 5 \sin x}{4}. \end{aligned}$$

終

問題 3.2.4 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{4 \sin x - 3x^2}{5}$ と定めます。関数 φ の導関数 φ' を求めなさい。

定理 3.2.1 及び 3.2.2 を証明します。次のことが基本になります：関数 φ について、変数 x の増分 Δx に対する $\varphi(x)$ の増分 $\Delta\varphi(x)$ は

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x);$$

関数 $\varphi(x)$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}.$$

まず定理 3.2.1 を証明します。変数 x と無関係な定数 k 及び微分可能な関数 f 及び x の増分 Δx に対して $\frac{d}{dx}\{kf(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{kf(x)\}}{\Delta x}$ を計算します。 x の増分 Δx に対する $f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ は

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき、 $kf(x)$ は $kf(x + \Delta x)$ に変化するので、その増分 $\Delta\{kf(x)\}$ は

$$\Delta\{kf(x)\} = kf(x + \Delta x) - kf(x) = k\{f(x + \Delta x) - f(x)\} = k\Delta f(x).$$

よって

$$\frac{\Delta\{kf(x)\}}{\Delta x} = \frac{k\Delta f(x)}{\Delta x} = k \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

関数 $f(x)$ は微分可能なので $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x)$, 更に定数 k は Δx と無関係なので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{kf(x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ k \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \right\} = k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = k \frac{d}{dx}f(x),$$

故に

$$\frac{d}{dx}\{kf(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{kf(x)\}}{\Delta x} = k \frac{d}{dx}f(x).$$

こうして定理 3.2.1 が証明されました。

次に定理 3.2.2 を証明します。微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ 及び x の増分 Δx に対して $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x}$ を計算します。 x の増分 Δx に対する $f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ 及び $g(x)$ の増分 $\Delta g(x)$ は、

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x).$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき、 $f(x)+g(x)$ は $f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$ に変化するので、その増分 $\Delta\{f(x)+g(x)\}$ は

$$\begin{aligned} \Delta\{f(x)+g(x)\} &= f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - \{f(x) + g(x)\} \\ &= f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x) \\ &= \Delta f(x) + \Delta g(x). \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x) + \Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能なので、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}g(x)$, よって

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x), \end{aligned}$$

故に

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)+g(x)\}}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x).$$

同様に $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}$ を計算すると

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x).$$

こうして定理 3.2.2 が証明されました。