

§ 3.3 関数の積・商の微分法

証明は後にしてまず定理だけを述べます。

定理 3.3.1 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して、関数 $f(x)g(x)$ は微分可能であり、

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) + f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}.$$

定理 3.3.2 微分可能な関数 $g(x)$ に対して、関数 $\frac{1}{g(x)}$ は $g(x) \neq 0$ のとき微分可能であり、

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

定理 3.3.3 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して、関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は $g(x) \neq 0$ のとき微分可能であり、

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) - f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

定理 3.3.3 において $f(x) = 1$ とおくと、 $\frac{d}{dx}1 = 0$ なので、

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx}1 \cdot g(x) - 1 \cdot \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} = \frac{0 \cdot g(x) - \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}.$$

つまり定理 3.3.2 は定理 3.3.3 の特別な場合です。

例題 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める。関数 g の導関数 g' を求める。

定理 3.3.1 より、

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x^3 \sin x) = \frac{d}{dx}x^3 \cdot \sin x + x^3 \frac{d}{dx}\sin x = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x. \quad \text{終}$$

問題 3.3.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x \cos x$ と定めます。関数 f の導関数 f' を求めなさい。

例題 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$ と定める⁸⁾。関数 φ の導関数 φ' を求める。

【解説】 定理 3.3.2 を用いると、

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2 \cos x + 3} = 5 \frac{d}{dx}\frac{1}{2 \cos x + 3} \\ &= 5 \frac{-\frac{d}{dx}(2 \cos x + 3)}{(2 \cos x + 3)^2} = 5 \frac{-2(-\sin x)}{(2 \cos x + 3)^2} \\ &= \frac{10 \sin x}{(2 \cos x + 3)^2}. \end{aligned}$$

定理 3.3.3 を用いても微分できる： $\frac{d}{dx}5 = 0$ なので、

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2 \cos x + 3} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}5 \cdot (2 \cos x + 3) - 5 \frac{d}{dx}(2 \cos x + 3)}{(2 \cos x + 3)^2} = \frac{0 - 5 \cdot 2(-\sin x)}{(2 \cos x + 3)^2} \\ &= \frac{10 \sin x}{(2 \cos x + 3)^2}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.3.2 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3 \sin x + 4}$ と定めます。関数 ψ の導関数 ψ' を求めなさい。

例題 変数 t の関数 $x = \frac{\sin t}{t^3}$ を微分する。

定理 3.3.3 より、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t^3} = \frac{\frac{d}{dt}\sin t \cdot t^3 - \sin t \cdot \frac{d}{dt}t^3}{(t^3)^2} = \frac{\cos t \cdot t^3 - \sin t \cdot 3t^2}{t^6} \\ &= \frac{t \cos t - 3 \sin t}{t^4}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.3.3 変数 u の関数 $v = \frac{\cos u}{u^4}$ を微分しなさい。

例題 変数 u の関数 $\frac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\frac{d}{du}(4u-5) \cdot (u^2+3) - (4u-5) \frac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{4(u^2+3) - (4u-5) \cdot 2u}{(u^2+3)^2} = \frac{4u^2+12-8u^2+10u}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{-4u^2+10u+12}{(u^2+3)^2}. \quad \text{終} \end{aligned}$$

問題 3.3.4 変数 x の関数 $y = \frac{5x-3}{x^2-4}$ を微分しなさい。

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は、 f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ でした。

例題 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める。自然対数の底 e に対して、 e^3 における f の微分係数を求める。

f の導関数 f' は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = \frac{d}{dx}x^2 \cdot \ln x + x^2 \frac{d}{dx}\ln x = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(1 + 2 \ln x).$$

e^3 における f の微分係数は、

$$f'(e^3) = e^3(1 + 2 \ln e^3) = e^3(1 + 2 \cdot 3) = 7e^3. \quad \text{終}$$

問題 3.3.5 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \ln x$ と定めます。自然対数の底 e に対して、 e^4 における f の微分係数を求めなさい。

定理 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 を証明します。次のことが基本になります：関数 φ について、変数 x の増分 Δx に対する $\varphi(x)$ の増分は $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ ；関数 $\varphi(x)$ の導関数は $\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}$ 。

まず定理 3.3.1 を証明します。微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ 及び変数 x の増分 Δx に対して、 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x}$ を計算します。 x の増分 Δx に対して、 $f(x)$ の増分は $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ 、 $g(x)$ の増分は $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$ ；よって、

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x), \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x).$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき、 $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので、その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned} \Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\{\Delta g(x) + g(x)\} - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x). \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \frac{\Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x)\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x + \Delta x) + f(x)\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能なので、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x)$ 、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ 、また、定理 2.7.1 より $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ 、更に $f(x)$ は Δx と無関係なので、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x + \Delta x) + f(x)\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x) \frac{d}{dx}g(x). \end{aligned}$$

故に

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x) \frac{d}{dx}g(x).$$

こうして定理 3.3.1 が証明されました。

次に定理 3.3.2 を証明します。微分可能な関数 $g(x)$ 及び変数 x の増分 Δx に対し

て $\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x}$ を計算します。 x の増分 Δx に対する $g(x)$ の増分は $\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x)$ なので、

$$g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x).$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき、 $\frac{1}{g(x)}$ は $\frac{1}{g(x + \Delta x)}$ に変化するので、その増分 $\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}$ は

$$\begin{aligned} \Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} &= \frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} = \frac{g(x) - \{\Delta g(x) + g(x)\}}{g(x + \Delta x)g(x)} \\ &= \frac{-\Delta g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x} = \frac{-\Delta g(x)}{\Delta x g(x)g(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)}.$$

関数 $g(x)$ は微分可能なので $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}g(x)$ 、また、定理 2.7.1 より $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g(x)$ 、更に $g(x)$ は Δx と無関係なので、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} \right\} \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x)} = -\frac{d}{dx}g(x) \cdot \frac{1}{g(x)g(x)} \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}, \end{aligned}$$

故に

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\Delta x} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}.$$

こうして定理 3.2.2 が証明されました。

最後に定理 3.3.3 を証明します。微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して、関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ を微分します。定理 3.3.1 及び定理 3.3.2 より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}\left\{f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)} + f(x) \left\{-\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}\right\} = \frac{\frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) - f(x) \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

こうして定理 3.2.3 が証明されました。

⁸⁾ 各実数 x について、 $\sin x \geq -1$ より $2 \sin x \geq -2$ なので $2 \sin x + 3 \geq 1$ 。ですから $2 \cos x + 3$ の値が 0 になることはありません。