§3.3　関数の積・商の微分法

証明は後にしてまず定理だけを述べます.

定理 3.3.1　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，関数 $f(x)g(x)$ は微分可能であり,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) + f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\} .$$

定理 3.3.2　微分可能な関数 $g(x)$ に対して，関数 $\dfrac{1}{g(x)}$ は $g(x)\neq 0$ のとき微分可能であり,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \quad (\ g(x)\neq 0\ ) .$$

定理 3.3.3　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $g(x)\neq 0$ のとき微分可能であり,

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}g(x) - f(x)\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}}{g(x)^2} \quad (\ g(x)\neq 0\ ) .$$

定理 3.3.3 において $f(x)=1$ とおくと, $\dfrac{d}{dx}1=0$ なので,

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx}1\cdot g(x) - 1\,\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} = \frac{0\cdot g(x) - \frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} .$$

つまり定理 3.3.2 は定理 3.3.3 の特別な場合です.

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=x^3\sin x$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

定理 3.3.1 より,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(x^3\sin x) = \frac{d}{dx}x^3\cdot\sin x + x^3\frac{d}{dx}\sin x \\ &= 3x^2\sin x + x^3\cos x . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.1}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin x\cos x$ と定めます. 関数 f の導関数 f' を求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=\dfrac{5}{2\cos x+3}$ と定める[8]. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

〔解説〕 定理 3.3.2 を用いると,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2\cos x+3} = 5\frac{d}{dx}\frac{1}{2\cos x+3} \\ &= 5\frac{-\frac{d}{dx}(2\cos x+3)}{(2\cos x+3)^2} = 5\frac{-2(-\sin x)}{(2\cos x+3)^2} \\ &= \frac{10\sin x}{(2\cos x+3)^2} . \end{aligned}$$

定理 3.3.3 を用いても微分できる： $\dfrac{d}{dx}5=0$ なので,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\frac{5}{2\cos x+3} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}5\cdot(2\cos x+3) - 5\frac{d}{dx}(2\cos x+3)}{(2\cos x+3)^2} = \frac{0-5\cdot 2(-\sin x)}{(2\cos x+3)^2} \\ &= \frac{10\sin x}{(2\cos x+3)^2} . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.2}}$　実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{2}{3\sin x+4}$ と定めます. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　変数 t の関数 $x=\dfrac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

定理 3.3.3 より,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\frac{\sin t}{t^3} = \frac{\frac{d}{dt}\sin t\cdot t^3 - \sin t\cdot\frac{d}{dt}t^3}{(t^3)^2} = \frac{\cos t\cdot t^3 - \sin t\cdot 3t^2}{t^6} \\ &= \frac{t\cos t - 3\sin t}{t^4} . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.3}}$　変数 u の関数 $v=\dfrac{\cos u}{u^4}$ を微分しなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　変数 u の関数 $\dfrac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\frac{d}{du}(4u-5)\cdot(u^2+3) - (4u-5)\frac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{4(u^2+3)-(4u-5)\cdot 2u}{(u^2+3)^2} = \frac{4u^2+12-8u^2+10u}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{-4u^2+10u+12}{(u^2+3)^2} . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.4}}$　変数 x の関数 $y=\dfrac{5x-3}{x^2-4}$ を微分しなさい.

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は, f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ でした.

$\boxed{\text{例題}}$　正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^2\ln x$ と定める. 自然対数の底 e に対して, e^3 における f の微分係数を求める.

f の導関数 f' は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2\ln x) = \frac{d}{dx}x^2\cdot\ln x + x^2\frac{d}{dx}\ln x = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = x(1+2\ln x) .$$

e^3 における f の微分係数は,

$$f'(e^3) = e^3(1+2\ln e^3) = e^3(1+2\cdot 3) = 7e^3 .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.5}}$　正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3\ln x$ と定めます. 自然対数の底 e に対して, e^4 における f の微分係数を求めなさい.

定理 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 を証明します. 次のことが基本になります：関数 φ について，変数 x の増分 $\varDelta x$ に対する $\varphi(x)$ の増分は $\varDelta\varphi(x)=\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)$ ；関数 $\varphi(x)$ の導関数は $\dfrac{d}{dx}\varphi(x)=\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta\varphi(x)}{\varDelta x}$.

まず定理 3.3.1 を証明します. 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ 及び変数 x の増分 $\varDelta x$ に対して, $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta\{f(x)g(x)\}}{\varDelta x}$ を計算します. x の増分 $\varDelta x$ に対して, $f(x)$ の増分は $\varDelta f(x)=f(x+\varDelta x)-f(x)$, $g(x)$ の増分は $\varDelta g(x)=g(x+\varDelta x)-g(x)$ ；よって,

$$f(x+\varDelta x) = \varDelta f(x)+f(x) , \qquad g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x)+g(x) .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x)$ に変化するので，その増分 $\varDelta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned} \varDelta\{f(x)g(x)\} &= f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\varDelta f(x)+f(x)\}g(x+\varDelta x) - f(x)g(x) \\ &= \varDelta f(x)g(x+\varDelta x) + f(x)g(x+\varDelta x) - f(x)g(x) \\ &= \varDelta f(x)g(x+\varDelta x) + f(x)\{\varDelta g(x)+g(x)\} - f(x)g(x) \\ &= \varDelta f(x)g(x+\varDelta x) + f(x)\varDelta g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) \\ &= \varDelta f(x)g(x+\varDelta x) + f(x)\varDelta g(x) . \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{\varDelta\{f(x)g(x)\}}{\varDelta x} &= \frac{\varDelta f(x)\cdot g(x+\varDelta x) + f(x)\varDelta g(x)}{\varDelta x} \\ &= \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}g(x+\varDelta x) + f(x)\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} . \end{aligned}$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能なので, $\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}=\dfrac{d}{dx}f(x)$, $\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}=\dfrac{d}{dx}g(x)$ ，また，定理 2.7.1 より $\lim\limits_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)=g(x)$ ，更に $f(x)$ は $\varDelta x$ と無関係なので,

$$\begin{aligned} \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)g(x)\}}{\varDelta x} &= \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}g(x+\varDelta x) + f(x)\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\right\} \\ &= \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x) + f(x)\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x} \\ &= \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) . \end{aligned}$$

故に

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\{f(x)g(x)\}}{\varDelta x} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x) .$$

こうして定理 3.3.1 が証明されました.

次に定理 3.3.2 を証明します. 微分可能な関数 $g(x)$ 及び変数 x の増分 $\varDelta x$ に対して $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{g(x)}=\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x}$ を計算します. x の増分 $\varDelta x$ に対する $g(x)$ の増分は $\varDelta g(x)=g(x+\varDelta x)-g(x)$ なので,

$$g(x+\varDelta x) = \varDelta g(x)+g(x) .$$

x が $x+\varDelta x$ に変化するとき, $\dfrac{1}{g(x)}$ は $\dfrac{1}{g(x+\varDelta x)}$ に変化するので，その増分 $\varDelta\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}$ は

$$\begin{aligned} \varDelta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\} &= \frac{1}{g(x+\varDelta x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x)-g(x+\varDelta x)}{g(x+\varDelta x)g(x)} = \frac{g(x)-\{\varDelta g(x)+g(x)\}}{g(x+\varDelta x)g(x)} \\ &= \frac{-\varDelta g(x)}{g(x)g(x+\varDelta x)} . \end{aligned}$$

よって

$$\frac{\varDelta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = \frac{-\frac{\varDelta g(x)}{g(x)g(x+\varDelta x)}}{\varDelta x} = -\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\frac{1}{g(x)g(x+\varDelta x)} .$$

関数 $g(x)$ は微分可能なので $\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}=\dfrac{d}{dx}g(x)$ ，また，定理 2.7.1 より $\lim\limits_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)=g(x)$ ，更に $g(x)$ は $\varDelta x$ と無関係なので,

$$\begin{aligned} \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} &= \lim_{\varDelta x\to 0}\left\{-\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\frac{1}{g(x)g(x+\varDelta x)}\right\} \\ &= -\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta g(x)}{\varDelta x}\cdot\frac{1}{g(x)\lim\limits_{\varDelta x\to 0}g(x+\varDelta x)} = -\frac{d}{dx}g(x)\cdot\frac{1}{g(x)g(x)} \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} , \end{aligned}$$

故に

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}}{\varDelta x} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} .$$

こうして定理 3.2.2 が証明されました.

最後に定理 3.3.3 を証明します. 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を微分します. 定理 3.3.1 及び定理 3.3.2 より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}\left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{g(x)} + f(x)\left\{-\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}\right\} = \frac{\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} . \end{aligned}$$

こうして定理 3.2.3 が証明されました.

---

[8] 各実数 x について, $\sin x\geq -1$ より $2\sin x\geq -2$ なので $2\sin x+3\geq 1$. ですから $2\cos x+3$ の値が 0 になることはありません.