

§ 3.4 いくつかの関数の導関数

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分します。 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ として、定理 3.3.3 と微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ とを用います。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{d}{dx} \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} . \end{aligned}$$

更に、次の公式が成り立ちました： $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ ⁹⁾。

定理 3.4.1 正接関数 $\tan x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad (\cos x \neq 0) .$$

例題 区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{\tan x}{x^2}$ と定める。関数 φ の導関数 φ' を求める。

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{\tan x}{x^2} = \frac{\frac{d}{dx} \tan x \cdot x^2 - \tan x \cdot \frac{d}{dx} x^2}{(x^2)^2} = \frac{\sec^2 x \cdot x^2 - \tan x \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{x \sec^2 x - 2 \tan x}{x^3} . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 3.4.1 区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \tan x$ と定めます。 f の導関数 f' を求めなさい。

問題 3.4.2 変数 t の関数 $x = \frac{\tan t}{t^3}$ を微分しなさい。

例 冪関数 x^{-3} ($x \neq 0$) を微分します： $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ ですから、定理 3.3.2 より、

$$\frac{d}{dx} x^{-3} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^3} = -\frac{\frac{d}{dx} x^3}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -3 \frac{1}{x^4} = -3x^{-4} . \quad \text{終}$$

一般的に、整数指数の冪関数について次の定理が成り立ちます。

定理 3.4.2 整数 n を指数とする冪関数 x^n の導関数は

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \quad (x \neq 0) .$$

証明 $n \geq 1$ のときは定理 3.1.1 そのものである。

$n = 0$ のときは、定理 3.1.2 より $\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} x^0 = \frac{d}{dx} 1 = 0$, また $nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0$, 従って $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$.

$n \leq -1$ のときは、 $n = -m$ とおく； m は正の整数なので、指数法則及び定理 3.3.2 と定理 3.1.1 とより

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^n &= \frac{d}{dx} x^{-m} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m} = -\frac{\frac{d}{dx} x^m}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} \\ &= nx^{n-1} . \end{aligned}$$

(証明終り)

例題 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x^5}$ と定める。 ψ の導関数 ψ' を求める。

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \frac{2}{3x^5} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} x^{-5} \right) = \frac{2}{3} \frac{d}{dx} x^{-5} = \frac{2}{3} (-5x^{-6}) \\ &= -\frac{10}{3x^6} . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 3.4.3 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \frac{3}{2x^4}$ と定めます。 g の導関数 g' を求めなさい。

⁹⁾ 正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ と定義しました (0.8 節参照)。