

§3.5 合成関数の微分法

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について、 $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとします。 $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ ができます。 変数 t を $t=f(x)$ とおき、変数 y を $y=g(t)$ とおきます。 $y=g(t)=g(g(x))$ 。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおきます。 Δx が 0 に近い値で $\Delta x \neq 0$ のとき $\Delta t \neq 0$ とします¹⁰⁾。 $f(x)$ は微分可能なので、定理 2.7.1 より、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $f(x+\Delta x) \rightarrow f(x)$ なので $\Delta t = f(x+\Delta x) - f(x) \rightarrow 0$ 。

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

これらのことより、

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

つまり

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

定理 3.5 微分可能な関数 f と g について、 f の値域が g の定義域に含まれるとき、変数 x, t, y を $t=f(x)$ かつ $y=g(t)$ とおくと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

例解 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できるのは、 $\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が \sin の中身と一致するときです。

$$\frac{d}{dx} \sin \boxed{x} = \cos x, \quad \frac{d}{dt} \sin \boxed{t} = \cos t.$$

ですから、変数 x の関数 $y = \sin(3x+2)$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(3x+2)$ を計算するには、このままでは微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できません。そこで次のようにして計算します。

変数 t を $t=3x+2$ とおきます。定理 3.5 より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$y = \sin(3x+2) = \sin t$ なので

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \sin t = \cos t = \cos(3x+2), \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{d}{dx} (3x+2) = 3 \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 2 = 3 \cdot 1 + 0 = 3. \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos(3x+2) \cdot 3 = 3 \cos(3x+2).$$

故に $\frac{dy}{dx} = 3 \cos(3x+2)$ 。 終

問題 3.5.1 変数 x の関数 $y = \cos(5x-3)$ を微分しなさい。

例題 変数 x の関数 $y = \tan \frac{5x+7}{4}$ を微分する。

【解説】 $t = \frac{5x+7}{4}$ とおく。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$y = \tan \frac{5x+7}{4} = \tan t$ なので

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \tan t = \sec^2 t = \sec^2 \frac{5x+7}{4}, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{5x+7}{4} = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} (5x+7) = \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \sec^2 \frac{5x+7}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \sec^2 \frac{5x+7}{4}.$$

故に $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{4} \sec^2 \frac{5x+7}{4}$ 。 終

問題 3.5.2 変数 x の関数 $y = \tan \frac{7x-5}{3}$ を微分しなさい。

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について、 $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとします。 $f(x)$ と g との合成関数 $g(f(x))$ ができます。 変数 t を $t=f(x)$ とおき、変数 y を $y=g(t)$ とおくと、前述の定理より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$y=g(t)$ なので、

$$\frac{d}{dx} g(t) = \frac{d}{dt} g(t) \cdot \frac{dt}{dx}.$$

例題 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2-5x+7)$ と定める¹¹⁾。関数 g の導関数 g' を求める。

【解説】 関数 $\ln(x^2-5x+7)$ は関数 x^2-5x+7 と関数 $\ln x$ との合成関数である。 $t = x^2-5x+7$ とおく。 $g(x) = \ln(x^2-5x+7) = \ln t$ なので、定理 3.5 より、

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$t = x^2-5x+7$ なので、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln t &= \frac{1}{t} = \frac{1}{x^2-5x+7}, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2-5x+7) = \frac{d}{dx} x^2 - 5 \frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 7 = 2x-5, \end{aligned}$$

よって

$$\frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2-5x+7} \cdot (2x-5) = \frac{2x-5}{x^2-5x+7}.$$

故に $g'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+7}$ 。 終

問題 3.5.3 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \ln(3x^2-7x+5)$ と定めなさい。関数 f の導関数 f' を求めなさい。

例題 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \cos^4 x$ と定める。関数 φ の導関数 φ' を求める。

【解説】 関数 $\varphi(x) = \cos^4 x = (\cos x)^4$ は関数 $\cos x$ と関数 x^4 との合成関数である。 $t = \cos x$ とおく。 $\varphi(x) = (\cos x)^4 = t^4$ なので、定理 3.5 より、

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} t^4 = \frac{d}{dt} t^4 \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$t = \cos x$ なので、

$$\frac{d}{dt} t^4 = 4t^3 = 4(\cos x)^3 = 4 \cos^3 x,$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x,$$

よって

$$\frac{d}{dt} t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4 \sin x \cos^3 x.$$

故に $\varphi'(x) = -4 \sin x \cos^3 x$ 。 終

問題 3.5.4 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定める。関数 ψ の導関数 ψ' を求めなさい。

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は、 f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ でした。

例題 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \cos \frac{5x+8\pi}{3}$ と定める。 π における ψ の微分係数を求める。

変数 t を $t = \frac{5x+8\pi}{3}$ とおく。 $\psi(x) = \cos \frac{5x+8\pi}{3} = \cos t$ なので、 ψ の導関数 ψ' は

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= -\sin t \cdot \frac{d}{dx} \frac{5x+8\pi}{3} = -\sin \frac{5x+8\pi}{3} \cdot \frac{5}{3} \\ &= -\frac{5}{3} \sin \frac{5x+8\pi}{3}. \end{aligned}$$

π における ψ の微分係数は

$$\begin{aligned} \psi'(\pi) &= -\frac{5}{3} \sin \frac{5\pi+8\pi}{3} = -\frac{5}{3} \sin \frac{13\pi}{3} \\ &= -\frac{5}{3} \sin \left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi \right) = -\frac{5}{3} \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$
終

問題 3.3.5 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \sin \frac{7x+8\pi}{3}$ と定めます。 $\frac{\pi}{2}$ における φ の微分係数を求めなさい。

¹⁰⁾ 独立変数 x の増分 Δx の値は私達が自由に決めることができるので、勝手に $\Delta x \neq 0$ とすることができます。しかし、 $\Delta t = f(x+\Delta x) - f(x)$ なので、従属変数 t の増分 Δt の値は x と Δx の値から自動的に決まってしまう；あるいは $\Delta t = 0$ となるかもしれません。もしそうなれば、 Δt を分母とする分数 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ には値がありません。ですから、本当は $\Delta t = 0$ になり得る場合を別に証明しなければなりません。が、繁雑なので省略します。

¹¹⁾ 各実数 x について、 $x^2-5x+7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ なので、 $g(x) = \ln(x^2-5x+7)$ の値があります。