

§ 3.5 合成関数の微分法

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について、 $f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとします。 $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ ができます。 変数 t を $t=f(x)$ とおき、変数 y を $y=g(t)$ とおきます。 $y=g(t)=g(f(x))$ 。 x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおきます。 Δx が 0 に近い値で $\Delta x \neq 0$ のとき $\Delta t \neq 0$ とします¹⁰⁾。 $f(x)$ は微分可能なので、定理 2.7.1 より、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $f(x+\Delta x) \rightarrow f(x)$ なので $\Delta t = f(x+\Delta x) - f(x) \rightarrow 0$ 。

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}.$$

これらのことより、

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

つまり

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$y=g(t)$ なので、 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}g(t)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}g(t)$, よって

$$\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}.$$

定理 3.5 微分可能な関数 f と g について、 f の値域が g の定義域に含まれるとき、変数 x, t を $t=f(x)$ とおくと、

$$\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}.$$

例解 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定めます。 f の導関数 f' を求めます。 変数 t を $t=3x+2$ とおきます。 $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分します。 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できるのは、 $\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が \sin の中身と一致するときです。

$$\frac{d}{d\underline{x}} \sin \underline{x} = \cos x, \quad \frac{d}{d\underline{t}} \sin \underline{t} = \cos t.$$

ですから、変数 x の関数 $f(x) = \sin t$ の導関数

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx} \sin t$$

を計算するには、このままでは微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を適用できません。そこで、定理 3.5 の公式 $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ において $g(t) = \sin t$ とおきます：

$$\frac{d}{dx} \sin t = \frac{d}{dt} \sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$t=3x+2$ なので、 $\cos t = \cos(3x+2)$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+2) = 3$, よって、

$$\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos(3x+2) \cdot 3 = 3 \cos(3x+2).$$

故に

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sin t = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = 3 \cos(3x+2). \quad \text{終}$$

例題 変数 x の関数 $y = \cos \frac{4x+5}{3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める。

【解説】 変数 t を $t = \frac{4x+5}{3}$ とおく。 $y = \cos \frac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos t.$$

定理 3.5 の公式 $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ において $g(t) = \cos t$ とおくと

$$\frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$t = \frac{4x+5}{3}$ なので、 $\sin t = \sin \frac{4x+5}{3}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{4x+5}{3} = \frac{4}{3}$, よって、

$$-\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin \frac{4x+5}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \sin \frac{4x+5}{3}.$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos t = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{4}{3} \sin \frac{4x+5}{3}. \quad \text{終}$$

問題 3.5.1 $\frac{7x-5}{3}$ が $\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を

$f(x) = \tan \frac{7x-5}{3}$ と定めます。 f の導関数 f' を求めなさい。

例題 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める¹¹⁾。 関数 g の導関数 g' を求める。

【解説】 変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく。 $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx} \ln t.$$

定理 3.5 の公式 $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ において $g(t) = \ln t$ とおくと

$$\frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので、 $\frac{1}{t} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$, よって

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7}.$$

故に

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7}. \quad \text{終}$$

問題 3.5.2 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい。

例題 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める。

【解説】 変数 t を $t = \cos x$ とおく。 $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} t^4.$$

定理 3.5 の公式 $\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t) \cdot \frac{dt}{dx}$ において $g(t) = t^4$ とおくと

$$\frac{d}{dx} t^4 = \frac{d}{dt} t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx}.$$

$t = \cos x$ なので、 $t^3 = (\cos x)^3 = \cos^3 x$, $\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$, よって

$$4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 4 \cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4 \sin x \cos^3 x.$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} t^4 = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = -4 \sin x \cos^3 x. \quad \text{終}$$

問題 3.5.3 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定めます。 関数 ψ の導関数 ψ' を求めなさい。

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は、 f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ でした。

例題 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \cos \frac{5x+8\pi}{3}$ と定める。 π における ψ の微分係数を求める。

変数 t を $t = \frac{5x+8\pi}{3}$ とおく。 $\psi(x) = \cos \frac{5x+8\pi}{3} = \cos t$ なので、 ψ の導関数 ψ' は

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \cos t = \frac{d}{dt} \cos t \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= -\sin t \cdot \frac{d}{dx} \frac{5x+8\pi}{3} = -\sin \frac{5x+8\pi}{3} \cdot \frac{5}{3} \\ &= -\frac{5}{3} \sin \frac{5x+8\pi}{3}. \end{aligned}$$

π における ψ の微分係数は

$$\begin{aligned} \psi'(\pi) &= -\frac{5}{3} \sin \frac{5\pi+8\pi}{3} = -\frac{5}{3} \sin \frac{13\pi}{3} \\ &= -\frac{5}{3} \sin \left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi \right) = -\frac{5}{3} \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{6}. \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 3.5.4 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \sin \frac{7x+8\pi}{3}$ と定めます。 $\frac{\pi}{2}$ における φ の微分係数を求めなさい。

¹⁰⁾ 独立変数 x の増分 Δx の値は私達が自由に決めることができるので、勝手に $\Delta x \neq 0$ とすることができます。しかし、 $\Delta t = f(x+\Delta x) - f(x)$ なので、従属変数 t の増分 Δt の値は x と Δx の値から自動的に決まってしまう；あるいは $\Delta t = 0$ となるかもしれません。もしそうなれば、 Δt を分母とする分数 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ には値がありません。ですから、本当は $\Delta t = 0$ になり得る場合を別に証明しなければなりません。が、繁雑なので省略します。

¹¹⁾ 各実数 x について、 $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ なので、 $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ の値があります。