§3.5　合成関数の微分法

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとします．$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ ができます．変数 t を $t=f(x)$ とおき，変数 y を $y=g(t)$ とおきます．$y=g(t)=g\big(g(x)\big)$ ．x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおきます．Δx が 0 に近い値で $\Delta x\neq 0$ のとき $\Delta t\neq 0$ とします[10]．$f(x)$ は微分可能なので，定理 2.7.1 より，$\Delta x\to 0$ のとき $f(x+\Delta x)\to f(x)$ なので $\Delta t=f(x+\Delta x)-f(x)\to 0$ ．

$$\frac{dy}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\ ,\qquad \frac{dt}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}\ .$$

これらのことより，

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Big(\frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\Big)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}\ ,$$

つまり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

定理 3.5　微分可能な関数 f と g とについて，f の値域が g の定義域に含まれるとき，変数 x,t,y を $t=f(x)$ かつ $y=g(t)$ とおくと，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

例解　微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ を適用できるのは，$\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が sin の中身と一致するときです．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x}=\cos x\ ,\qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t}=\cos t\ .$$

（x と x，t と t が一致）

ですから，変数 x の関数 $y=\sin(3x+2)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\sin(3x+2)$ を計算するには，このままでは微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ を適用できません．そこで次のようにして計算します．

変数 t を $t=3x+2$ とおきます．定理 3.5 より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$y=\sin(3x+2)=\sin t$ なので

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\sin t=\cos t=\cos(3x+2)\ ,$$
$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(3x+2)=3\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}2=3\cdot 1+0=3\ .$$

よって，

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\cos(3x+2)\cdot 3=3\cos(3x+3)\ .$$

故に $\dfrac{dy}{dx}=3\cos(3x+2)$ ．　終

問題 3.5.1　変数 x の関数 $y=\cos(5x-3)$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $y=\tan\dfrac{5x+7}{4}$ を微分する．

〔解説〕 $t=\dfrac{5x+7}{4}$ とおく．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$y=\tan\dfrac{5x+7}{4}=\tan t$ なので

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\tan t=\sec^2 t=\sec^2\frac{5x+7}{4}\ ,$$
$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{5x+7}{4}=\frac{1}{4}\frac{d}{dx}(5x+7)=\frac{1}{4}\cdot 5=\frac{5}{4}\ .$$

よって，

$$\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\sec^2\frac{5x+7}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\sec^2\frac{5x+7}{4}\ .$$

故に $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{3}\sec^2\dfrac{5x+7}{3}$ ．　終

問題 3.5.2　変数 x の関数 $y=\tan\dfrac{7x-5}{3}$ を微分しなさい．

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて，$f(x)$ の値域が $g(x)$ の定義域に含まれるとします．$f(x)$ と g との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ ができます．変数 t を $t=f(x)$ とおき，変数 y を $y=g(t)$ とおくと，前述の定理より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$y=g(t)$ なので，

$$\frac{d}{dx}g(t)=\frac{d}{dt}g(t)\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

例題　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=\ln(x^2-5x+7)$ と定める[11]．関数 g の導関数 g' を求める．

〔解説〕 関数 $\ln(x^2-5x+7)$ は関数 x^2-5x+7 と関数 $\ln x$ との合成関数である．$t=x^2-5x+7$ とおく．$g(x)=\ln(x^2-5x+7)=\ln t$ なので，定理 3.5 より，

$$g'(x)=\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}\ln t=\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=x^2-5x+7$ なので，

$$\frac{d}{dt}\ln t=\frac{1}{t}=\frac{1}{x^2-5x+7}\ ,$$
$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2-5x+7)=\frac{d}{dx}x^2-5\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}7=2x-5\ ,$$

よって

$$\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2-5x+7}\cdot(2x-5)=\frac{2x-5}{x^2-5x+7}\ .$$

故に $g'(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+7}$ ．　終

問題 3.5.3　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\ln(3x^2-7x+5)$ と定めます．関数 f の導関数 f' を求めなさい．

例題　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=\cos^4 x$ と定める．関数 φ の導関数 φ' を求める．

〔解説〕 関数 $\varphi(x)=\cos^4 x=(\cos x)^4$ は関数 $\cos x$ と関数 x^4 との合成関数である．$t=\cos x$ とおく．$\varphi(x)=(\cos x)^4=t^4$ なので，定理 3.5 より，

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}\varphi(x)=\frac{d}{dx}t^4=\frac{d}{dt}t^4\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=\cos x$ なので，

$$\frac{d}{dt}t^4=4t^3=4(\cos x)^3=4\cos^3 x\ ,$$
$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x\ ,$$

よって

$$\frac{d}{dt}t^4\cdot\frac{dt}{dy}=4\cos^3 x\cdot(-\sin x)=-4\sin x\cos^3 x\ .$$

故に $\varphi'(x)=-4\sin x\cos^3 x$ ．　終

問題 3.5.4　実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\sin^3 x$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めなさい．

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は，f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ でした．

例題　実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ と定める．π における ψ の微分係数を求める．

変数 t を $t=\dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく．$\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}=\cos t$ なので，ψ の導関数 ψ' は

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\cos t=\frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx}\\&=-\sin t\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x+8\pi}{3}=-\sin\frac{5x+8\pi}{3}\cdot\frac{5}{3}\\&=-\frac{5}{3}\sin\frac{5x+8\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

π における ψ の微分係数は

$$\begin{aligned}\psi'(\pi)&=-\frac{5}{3}\sin\frac{5\pi+8\pi}{3}=-\frac{5}{3}\sin\frac{13\pi}{3}\\&=-\frac{5}{3}\sin\Big(\frac{13\pi}{3}-4\pi\Big)=-\frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=-\frac{5\sqrt{3}}{6}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.3.5　実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=\sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ と定めます．$\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数を求めなさい．

---

[10] 独立変数 x の増分 Δx の値は私達が自由に決めることができるので，勝手に $\Delta x\neq 0$ とすることができます．しかし，$\Delta t=f(x+\Delta x)-f(x)$ なので，従属変数 t の増分 Δt の値は x と Δx の値から自動的に決まってしまいます；あるいは $\Delta t=0$ となるかもしれません．もしそうなれば，Δt を分母とする分数 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ には値がありません．ですから，本当は $\Delta t=0$ になり得る場合を別に証明しなければなりませんが，繁雑なので省略します．

[11] 各実数 x について，$x^2-5x+7=\Big(x-\dfrac{5}{2}\Big)^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}>0$ なので，$g(x)=\ln(x^2-5x+7)$ の値があります．