§3.6　いくつかの関数の導関数

指数関数の導関数は次のようになります．

定理 3.6.1　定数 a は実数で $a>0$ ，$a\neq 1$ のとき，a を底とする指数関数 a^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a\ .$$

特に，自然対数の底 e に対して，指数関数 e^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x\ .$$

証明　$y=a^x$ とおく．$\dfrac{d}{dx}a^x=\dfrac{dy}{dx}$ を求める．$y=a^x$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln a^x = x\ln a\ .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(x\ln a)\ . \tag{1}$$

この等式 (1) の左辺は，定理3.5より

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\ ;$$

$\ln a$ は定数なので，等式 (1) の右辺は

$$\frac{d}{dx}(x\ln a) = \ln a\cdot\frac{d}{dx}x = \ln a\cdot 1 = \ln a\ ;$$

従って $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=\ln a$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = y\ln a\ .$$

$y=a^x$ なので，$\dfrac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$ ．

特に，$a=e$ のとき，$\ln e=\log_e e=1$ なので，

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x\ln e = e^x\cdot 1 = e^x\ .$$

（証明終り）

例題　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=3^x\sin x$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

$\dfrac{d}{dx}3^x=3^x\ln x$ なので，

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(3^x\sin x) = \frac{d}{dx}3^x\cdot\sin x + 3^x\cdot\frac{d}{dx}\sin x = 3^x\ln 3\sin x + 3^x\cos x\\ &= 3^x(\ln 3\sin x + \cos x)\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.6.1　実数全体を定義域とする関数 f を $g(x)=2^x\cos x$ と定める．関数 f の導関数 f' を求めなさい．

例題　変数 x の関数 $y=\dfrac{x^3}{5^x}$ を微分しなさい．

$\dfrac{d}{dx}5^x=5^x\ln 5$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx}x^3\cdot 5^x - x^3\frac{d}{dx}5^x}{(5^x)^2} = \frac{3x^2\,5^x - x^3\,5^x\ln 5}{(5^x)^2}\\ &= \frac{3x^2 - x^3\ln 5}{5^x}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.6.2　変数 x の関数 $y=\dfrac{\sin x}{3^x}$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $y=e^{2x-3}$ を微分する．

$t=2x-3$ とおく．$y=e^{2x-3}=e^t$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}e^t = \frac{d}{dt}e^t\cdot\frac{dt}{dx} = e^t\cdot\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3}\cdot 2\\ &= 2e^{2x-3}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.6.3　変数 u の関数 $v=e^{5-3u}$ を微分しなさい．

実数を指数とする冪関数の導関数は次のようになります．

定理 3.6.2　実数 p を指数とする冪関数 x^p の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1}\quad (\ x>0\ )\ .$$

証明　$y=x^p$ （ $x>0$ ）とおく．$\dfrac{d}{dx}x^p=\dfrac{dy}{dx}$ を求める．$y=x^p$ の自然対数をとると，

$$\ln y = \ln x^p = p\ln x\ .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}(p\ln x)\ . \tag{2}$$

この等式 (2) の左辺は，定理3.5より

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\ ;$$

p は定数なので，等式 (2) の右辺は，

$$\frac{d}{dx}(p\ln x) = p\frac{d}{dx}\ln x = p\frac{1}{x}\ ;$$

従って $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{1}{x}$ なので，

$$\frac{dy}{dx} = p\frac{y}{x}\ .$$

$y=x^p$ なので，$\dfrac{d}{dx}x^p=p\dfrac{x^p}{x}=px^{p-1}$ ．（証明終り）

冪関数の微分公式を並べてみます．

定理3.1.1：定数 n が正の整数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ ；

定理3.4.3：定数 n が整数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ （ $x\neq 0$ ）；

定理3.6.2：定数 p が実数であるとき $\dfrac{d}{dx}x^p=px^{p-1}$ （ $x>0$ ）．

冪関数の指数の範囲が広がると独立変数 x の値の範囲は狭くなります．

例題　変数 x の関数 $\sqrt[3]{x}^{\,2}$, $\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ を微分する．

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}^{\,2} = \frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\ .$$

$$\frac{d}{dx}\frac{3}{\sqrt{x}} = 3\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = 3\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}^3} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}\ .$$

終

問題 3.6.4　変数 x の関数 $\sqrt{x}^{\,3}$ を微分しなさい．

問題 3.6.5　変数 x の関数 $\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$ を微分しなさい．

例題　変数 y の関数 $z=\sqrt{y^2-3y+5}$ を微分する．

$t=y^2-3y+5$ とおく．$z=\sqrt{y^2-3y+5}=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$ なので，定理3.5を用いると，

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy}t^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{dt}{dy} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dy}(y^2-3y+5) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(2y-3)\\ &= \frac{2y-3}{2\sqrt{y^2-3y+5}}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.6.6　変数 y の関数 $z=\sqrt{3y^2-5y+4}$ を微分しなさい．

例題　区間 $\left[-\dfrac{5}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}$ と定める．7 における f の微分係数を求める．

変数 t を $t=5x+1$ とおく．$f(x)=\sqrt{5x+1}^{\,3}=\sqrt{t}^{\,3}=t^{\frac{3}{2}}$ なので，f の導関数 f' は

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt}t^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}(5x+1) = \frac{3}{2}\sqrt{t}\cdot 5\\ &= \frac{15}{2}\sqrt{5x+1}\ .\end{aligned}$$

7 における f の微分係数は

$$f'(7) = \frac{15}{2}\sqrt{5\cdot 7+1} = \frac{15}{2}\sqrt{36} = \frac{15}{2}\cdot 6 = 45\ .$$

終

問題 3.3.7　区間 $\left[\dfrac{5}{6},\infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sqrt{6x-5}^{\,3}$ と定めます．9 における g の微分係数を求めなさい．

最後に，定理3.1.3を拡張します．

定理 3.6.3　関数 $\ln|x|$ （ $x\neq 0$ ）の導関数は

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}\quad (\ x\neq 0\ )\ .$$

証明　$x\neq 0$ なので，$x>0$ または $x<0$ ．$x>0$ のときは，$|x|=x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}\ .$$

$x<0$ のときは，$y=-x$ とおくと，$|x|=-x=y$ なので，定理3.5より

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{d}{dx}(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}\ .$$

故に，どちらのときも $\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$ ．（証明終り）

例題　変数 y の関数 $z=\ln|y^3+2|$ を微分する．

$t=y^3+2$ とおく．$z=\ln|y^3+2|=\ln|t|$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy}\ln|t| = \frac{d}{dt}\ln|t|\cdot\frac{dt}{dy} = \frac{1}{t}\cdot\frac{d}{dy}(y^3+2) = \frac{1}{y^3+2}3y^2\\ &= \frac{3y^2}{y^3+2}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.6.8　変数 x の関数 $y=\ln|\cos x|$ を微分しなさい．