

§ 3.7 逆三角関数の導関数

逆三角関数の導関数は以下のようになります (その証明は後にします) .

定理 3.7 逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ 及び逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の導関数は、各々、

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) ,$$

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) .$$

例題 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \tan^{-1}x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を求める.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 \tan^{-1}x) = \frac{d}{dx}x^2 \cdot \tan^{-1}x + x^2 \cdot \frac{d}{dx} \tan^{-1}x \\ &= 2x \tan^{-1}x + \frac{x^2}{x^2+1} . \end{aligned}$$

終

例題 変数 s の関数 $t = \frac{\sin^{-1}s}{s^2}$ を微分する.

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{d}{ds} \frac{\sin^{-1}s}{s^2} = \frac{\frac{d}{ds} \sin^{-1}s \cdot s^2 - \sin^{-1}s \cdot \frac{d}{ds} s^2}{(s^2)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \cdot s^2 - \sin^{-1}s \cdot 2s}{s^4} = \frac{s^2 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} - 2s \sin^{-1}s}{s^4} \\ &= \frac{1}{s^2 \sqrt{1-s^2}} - \frac{2 \sin^{-1}s}{s^3} . \end{aligned}$$

終

問題 3.7.1 変数 u の関数 $v = \frac{\tan^{-1}u}{u^2+1}$ を微分しなさい.

問題 3.7.2 区間 $[-1, 1]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = (1-x^2) \sin^{-1}x$ と定めま
す. 関数 g の導関数 g' を求めなさい.

例題 変数 x の関数 $\sin^{-1}x^2$ を微分する.

$y = x^2$ とおく. $\sin^{-1}x^2 = \sin^{-1}y$ なので, 定理 3.5 を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1}x^2 &= \frac{d}{dx} \sin^{-1}y = \frac{d}{dy} \sin^{-1}y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{d}{dx} x^2 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} . \end{aligned}$$

終

問題 3.7.3 変数 t の関数 $\tan^{-1}t^3$ を微分しなさい.

問題 3.7.4 変数 y の関数 $z = \sqrt{\cos^{-1}y}$ を微分しなさい.

定理 3.7 を証明します.

まず逆正接関数 $\tan^{-1}x$ を微分します. $y = \tan^{-1}x$ とおきます. 関数 $\tan^{-1}x$ は
関数 $\tan x$ の逆関数ですから

$$\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x .$$

これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は定理 3.5 と微分公式 $\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x$ (定理 3.4.1) より

$$\frac{d}{dx} \tan y = \frac{d}{dy} \tan y \cdot \frac{dy}{dx} = (1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は $\frac{d}{dx} x = 1$ なので, $(1 + \tan^2 y) \frac{dy}{dx} = 1$, よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} .$$

$y = \tan^{-1}x$, $\tan y = \tan(\tan^{-1}x) = x$ なので,

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} .$$

次に逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) を微分します. $y = \sin^{-1}x$ とおきます.
関数 $\sin^{-1}x$ は関数 $\sin x$ の逆関数ですから

$$\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx} \sin y = \frac{d}{dy} \sin y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は $\frac{d}{dx} x = 1$ なので, $\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$, よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} . \tag{1}$$

$\cos y$ を x の式で表します. $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ 及び $\sin y = \sin(\sin^{-1}x) = x$ より,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2 ,$$

$$\cos y = \pm \sqrt{1-x^2} .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ ¹⁰⁾ より $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos y \geq 0$, 従って

$$\cos y = \sqrt{1-x^2} .$$

この等式と等式 (1) とより

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ,$$

$y = \sin^{-1}x$ なので $\frac{d}{dx} \sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

最後に逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ ($-1 \leq x \leq 1$) を微分します. $y = \cos^{-1}x$ とおきます.
関数 $\cos^{-1}x$ は関数 $\cos x$ の逆関数ですから

$$\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x .$$

x で微分すると

$$\frac{d}{dx} \cos y = \frac{d}{dx} x .$$

この等式の左辺は定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx} \cos y = \frac{d}{dy} \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は $\frac{d}{dx} x = 1$ なので, $-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$, よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} . \tag{2}$$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ 及び $\cos y = \cos(\cos^{-1}x) = x$ より,

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2 ,$$

$$\sin y = \pm \sqrt{1-x^2} .$$

$0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ ¹¹⁾ より $0 \leq y \leq \pi$ なので $\sin y \geq 0$, 従って

$$\sin y = \sqrt{1-x^2} .$$

この等式と等式 (2) とより

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ,$$

$y = \cos^{-1}x$ なので $\frac{d}{dx} \cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

¹⁰⁾ 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ の値について $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ でした (0.9 節参照) .

¹¹⁾ 逆余弦関数 $\cos^{-1}x$ の値について $0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$ でした (0.9 節参照) .