§3.8　合成関数の微分法

関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとき，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ ができました．この合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の微分法の公式をもう少し追及します．

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとします．まず，変数 t を $t=f(x)$ とおきます．定理 3.5 より

$$\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t)\cdot\frac{dt}{dx}\ ;$$

ここで，$t=f(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dx}g\big(f(x)\big)\ , \qquad \frac{d}{dt}g(t) = g'(t) = g'\big(f(x)\big)\ , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)\ ,$$

従って

$$\frac{d}{dx}g\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big)\,\frac{d}{dx}f(x)\ .$$

定理 3.8　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて，関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとき，合成関数 $g\big(f(x)\big)$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}g\big(f(x)\big) = g'\big(f(x)\big)\,\frac{d}{dx}f(x)\ .$$

定理 3.8 の公式において $f(x)$ を $\square$ で置き換えた公式もどきを示します：

$$\frac{d}{dx}g(\square) = g'(\square)\,\frac{d}{dx}(\square)\ .$$

つまり，$g(\square)$ を微分するには，外側の関数 g だけを微分して g の中身の $\square$ はそのままにした式 $g'(\square)$ に g の中身 $\square$ を微分した式 $\frac{d}{dx}(\square)$ を掛けます．

例解　変数 x の関数 $\sin\frac{5x+4}{3}$ を微分します．3.5 節で述べた方法では，$\frac{5x+4}{3}$ を新しい変数 t とかに置き換えて微分しました．できればこのように置き換えることなく微分して下さい．定理 3.8 の公式もどき $\frac{d}{dx}g(\square)=g'(\square)\frac{d}{dx}(\square)$ において $g(x)=\sin x$ とおくと，$g'(x)=\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\sin(\square) = \cos(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square)\ .$$

この等式において $\square$ に $\frac{5x+4}{3}$ を代入します．

$$\frac{d}{dx}\sin\frac{5x-4}{3} = \cos\frac{5x-4}{3}\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x-4}{3} = \cos\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{3}\cos\frac{5x+4}{3}\ .$$ 終

例題　変数 x の関数 $\cos\frac{\pi(3x-2)}{5}$ を微分する．

〔解説〕定理 3.8 の公式もどき $\frac{d}{dx}g(\square)=g'(\square)\frac{d}{dx}(\square)$ において $g(x)=\cos x$ とおくと，$g'(x)=\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\cos(\square) = -\sin(\square)\cdot\frac{d}{dx}(\square)\ .$$

この等式において $\square$ に $\frac{\pi(3x-2)}{5}$ を代入する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin\frac{\pi(3x-2)}{5} &= \cos\frac{\pi(3x-2)}{5}\cdot\frac{d}{dx}\frac{\pi(3x-2)}{5} = -\sin\frac{\pi(3x-2)}{5}\cdot\frac{3\pi}{5}\\ &= -\frac{3\pi}{5}\sin\frac{\pi(3x-2)}{5}\ .\end{aligned}$$ 終

問題 3.8.1　変数 x の関数 $\tan\frac{\pi(5x-4)}{7}$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $\ln|e^x-3|$ を微分する．

〔解説〕定理 3.8 の公式もどき $\frac{d}{dx}g(\square)=g'(\square)\frac{d}{dx}(\square)$ において $g(x)=\ln|x|$ とおくと，$g'(x)=\frac{d}{dx}\ln|x|=\frac{1}{x}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln|\square| = \frac{1}{\square}\,\frac{d}{dx}(\square)\ .$$

この等式において $\square$ に e^x-3 を代入する．

$$\frac{d}{dx}\ln|e^x-3| = \frac{1}{e^x-3}\,\frac{d}{dx}(e^x-3) = \frac{1}{e^x-3}\,e^x = \frac{e^x}{e^x-3}\ .$$ 終

問題 3.8.2　変数 x の関数 $\ln|3e^x-5|$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $(\tan^{-1}x)^3$ を微分する．

〔解説〕$\frac{d}{dx}x^3=3x^2$ なので $\frac{d}{dx}(\square)^3=3(\square)^2\frac{d}{dx}(\square)$．この等式において $\square$ に $\tan^{-1}x$ を代入する．

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)^3 = 3(\tan^{-1}x)^2\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = 3(\sin^{-1}x)^2\frac{1}{1+x^2} = \frac{3(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\ .$$ 終

問題 3.8.3　変数 x の関数 $(\sin^{-1}x)^4$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x+7}}$ を微分する．

〔解説〕$\sqrt{\frac{6}{5x+7}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5x+7}} = \sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}}$．$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ なので $\frac{d}{dx}(\square)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\square)^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{dx}(\square)$．この等式において $\square$ に $5x+7$ を代入する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{6}{5x+7}} &= \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{6}(5x+7)^{-\frac{1}{2}}\right\} = \sqrt{6}\frac{d}{dx}(5x+7)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}\right)(5x+7)^{-\frac{3}{2}}\frac{d}{dx}(5x+7) = -\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{(5x+7)^3}}\cdot 5\\ &= -5\sqrt{\frac{3}{2(5x+7)^3}}\ .\end{aligned}$$ 終

問題 3.8.4　変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{x^2+5}}$ を微分しなさい．

例題　変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する．

〔解説〕微分公式 $\frac{d}{dx}e^x=e^x$ より $\frac{d}{dt}e^{\square}=e^{\square}\frac{d}{dt}(\square)$．この等式において $\square$ に $\sin t$ を代入する．

$$\frac{d}{dt}e^{\sin t} = e^{\sin t}\frac{d}{dt}\sin t = e^{\sin t}\cos t\ .$$ 終

問題 3.8.5　変数 t の関数 $e^{\tan t}$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $\sin^{-1}x^3$ を微分する．

〔解説〕$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(\square)=\frac{1}{\sqrt{1-(\square)^2}}\frac{d}{dx}(\square)$．この等式において $\square$ に x^3 を代入する．

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\cdot\frac{d}{dx}x^3 = \frac{1}{\sqrt{1-x^6}}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\ .$$ 終

問題 3.8.6　変数 x の関数 $\tan^{-1}\sqrt{x}$ を微分しなさい．

例題　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3\sin(4x+3)$ と定める．f の導関数 f' を求める．

$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot\frac{d}{dx}(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot 4 = 4\cos(4x+3)\ .$$

よって，

$$\begin{aligned}f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{x^3\sin(4x+3)\} &= \frac{d}{dx}x^3\cdot\sin(4x+3) + x^3\cdot\frac{d}{dx}\sin(4x+3)\\ &= 3x^2\cdot\sin(4x+3) + x^3\cdot 4\cos(4x+3)\\ &= 3x^2\sin(4x+3) + 4x^3\cos(4x+3)\ .\end{aligned}$$ 終

問題 3.8.7　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=e^x\cos(3x+1)$ と定めます．g の導関数 g' を求めなさい．

例題　変数 x の関数 $y=\frac{e^{2x-3}}{x^3}$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める．

$$\frac{d}{dx}e^{2x-3} = e^{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3}\cdot 2 = 2e^{2x-3}\ .$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{e^{2x-3}}{x^3} &= \frac{\frac{d}{dx}e^{2x-3}\cdot x^3 - e^{2x-3}\cdot\frac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2}\\ &= \frac{2e^{2x-3}\cdot x^3 - e^{2x-3}\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2xe^{2x-3}-3e^{2x-3}}{x^4}\\ &= \frac{e^{2x-3}(2x-3)}{x^4}\ .\end{aligned}$$ 終

問題 3.8.8　変数 t の関数 $x=\frac{\sin t}{e^{3t-5}}$ の導関数 $\frac{dx}{dt}$ を求めなさい．