§3.8　合成関数の微分法

関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとき，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ ができました．この合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の微分法の公式をもう少し追及します．

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとします．まず，$t=f(x)$ とおきます．定理3.5より

$$\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dt}g(t)\cdot\frac{dt}{dx}\ ;$$

ここで，$t=f(x)$ なので，

$$\frac{d}{dx}g(t) = \frac{d}{dx}g\bigl(f(x)\bigr)\ ,\qquad \frac{d}{dt}g(t) = g'(t) = g'\bigl(f(x)\bigr)\ ,\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)\ ,$$

従って

$$\frac{d}{dx}g\bigl(f(x)\bigr) = g'\bigl(f(x)\bigr)\frac{d}{dx}f(x)\ .$$

定理 3.8　微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて，関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとき，合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}g\bigl(f(x)\bigr) = g'\bigl(f(x)\bigr)\frac{d}{dx}f(x)\ .$$

この公式において $f(x)$ を $\bigcirc$ で置き換えた疑似的な公式を示します：

$$\frac{d}{dx}g(\bigcirc) = g'(\bigcirc)\frac{d}{dx}(\bigcirc)\ .$$

例題　変数 x の関数 $\cos\dfrac{5x-4}{3}$ を微分する．

〔解説〕　公式 $\dfrac{d}{dx}g(\bigcirc) = g'(\bigcirc)\dfrac{d}{dx}(\bigcirc)$ において $g(x)=\cos x$ とおくと，$g'(x) = \dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ なので，

$$\frac{d}{dx}\cos(\bigcirc) = -\sin(\bigcirc)\cdot\frac{d}{dx}(\bigcirc)\ ;$$

この等式において $\bigcirc$ に $\dfrac{5x-4}{3}$ を代入する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cos\frac{5x-4}{3} &= -\sin\frac{5x-4}{3}\cdot\frac{d}{dx}\frac{5x-4}{3} = -\sin\frac{5x-4}{3}\cdot\frac{5}{3}\\ &= -\frac{5}{3}\sin\frac{5x-4}{3}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.8.1　変数 x の関数 $\sin\dfrac{3x-5}{4}$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $y=\ln(x^2+3)$ を微分する．

〔解説〕　公式 $\dfrac{d}{dx}g(\bigcirc) = g'(\bigcirc)\dfrac{d}{dx}(\bigcirc)$ において $g(x)=\ln x$ とおくと，$g'(x) = \dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ なので，

$$\frac{d}{dx}\ln(\bigcirc) = \frac{1}{\bigcirc}\frac{d}{dx}(\bigcirc)\ ;$$

この等式において $\bigcirc$ に x^2+3 を代入する．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}2x = \frac{2x}{x^2+3}\ .$$

終

問題 3.8.2　変数 x の関数 $y=\ln(\sin x+3)$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $(\sin^{-1}x)^3$ を微分する．

〔解説〕　$\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ より $\dfrac{d}{dx}(\bigcirc)^3 = 3(\bigcirc)^2\dfrac{d}{dx}(\bigcirc)$．この等式において $\bigcirc$ に $\sin^{-1}x$ を代入する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^3 &= 3(\sin^{-1}x)^2\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = 3(\sin^{-1}x)^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= \frac{3(\sin^{-1}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.8.3　変数 x の関数 $\sin^4 x$ を微分しなさい．

例題　変数 x の関数 $y=\tan^{-1}x^3$ を微分する．

〔解説〕　$\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$ より $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(\bigcirc) = \dfrac{1}{1+(\bigcirc)^2}\dfrac{d}{dx}(\bigcirc)$．この等式において $\bigcirc$ に x^3 を代入する．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}x^3 = \frac{1}{1+(x^3)^2}\cdot\frac{d}{dx}x^3 = \frac{1}{1+x^6}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{1+x^6}\ .$$

終

問題 3.8.4　変数 x の関数 $y=\tan^{-1}\sqrt{x}$ を微分しなさい．

例題　変数 t の関数 $e^{\sin t}$ を微分する．

〔解説〕　$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ より $\dfrac{d}{dt}e^{\bigcirc} = e^{\bigcirc}\dfrac{d}{dt}(\bigcirc)$．この等式において $\bigcirc$ に $\sin t$ を代入する．

$$\frac{d}{dt}e^{\sin t} = e^{\sin t}\frac{d}{dt}\sin t = e^{\sin t}\cos t\ .$$

終

問題 3.8.5　変数 t の関数 e^{3-2t} を微分しなさい．

例題　変数 y の関数 $\sqrt{e^y+3}$ を微分する．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\sqrt{e^y+3} &= \frac{d}{dy}(e^y+3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(e^y+3)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dy}(e^y+3) = \frac{1}{2\sqrt{e^y+3}}e^y\\ &= \frac{e^y}{2\sqrt{e^y+3}}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.8.6　変数 u の関数 $v=\sqrt{u^2-4u+5}$ を微分しなさい．

例題　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3\sin(4x+3)$ と定める．f の導関数 f' を求める．

$$\frac{d}{dx}\sin(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot\frac{d}{dx}(4x+3) = \cos(4x+3)\cdot 4 = 4\cos(4x+3)\ .$$

よって，

$$\begin{aligned}f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\{x^3\sin(4x+3)\} = \frac{d}{dx}x^3\cdot\sin(4x+3) + x^3\cdot\frac{d}{dx}\sin(4x+3)\\ &= 3x^2\cdot\sin(4x+3) + x^3\cdot 4\cos(4x+3)\\ &= 3x^2\sin(4x+3) + 4x^3\cos(4x+3)\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.8.7　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=e^x\cos(3x+1)$ と定めます．g の導関数 g' を求めなさい．

例題　変数 x の関数 $y=\dfrac{e^{2x-3}}{x^3}$ を微分する．

$$\frac{d}{dx}e^{2x-3} = e^{2x-3}\frac{d}{dx}(2x-3) = e^{2x-3}\cdot 2 = 2e^{2x-3}\ .$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{e^{2x-3}}{x^3} &= \frac{\dfrac{d}{dx}e^{2x-3}\cdot x^3 - e^{2x-3}\cdot\dfrac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2}\\ &= \frac{2e^{2x-3}\cdot x^3 - e^{2x-3}\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2xe^{2x-3}-3e^{2x-3}}{x^4}\\ &= \frac{e^{2x-3}(2x-3)}{x^4}\ .\end{aligned}$$

終

問題 3.8.8　変数 t の関数 $x=\dfrac{\sin t}{e^{3t-5}}$ を微分しなさい．