

第3章の補遺1 逆関数の微分法

3.7節で用いた逆三角関数の微分法を一般化して、関数 f の導関数から f の逆関数の導関数を導きます。微分可能な関数 f の逆関数 g があるとします。関数 g も微分可能であるとします。 g の導関数 g' を求めます。

逆関数の性質より $f(g(x)) = x$ 。この式の両辺を x で微分します：

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{d}{dx}x .$$

この等式の左辺は、合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) ,$$

右辺は $\frac{d}{dx}x = 1$; 従って

$$f'(g(x))g'(x) = 1 .$$

よって、 $f'(g(x)) \neq 0$ ならば

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} .$$

こうして次の定理が導かれました：関数 g が微分可能な関数 f の逆関数であるとき、 $f'(g(x)) \neq 0$ となる範囲で g も微分可能で、

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (f'(g(x)) \neq 0) .$$