第３章の補遺１　逆関数の微分法

3.7 節で用いた逆三角関数の微分法を一般化して，関数 f の導関数から f の逆関数の導関数を導きます． 微分可能な関数 f の逆関数 g があるとします． 関数 g も微分可能であるとします． g の導関数 g' を求めます.

逆関数の性質より $f\big(g(x)\big) = x$ ． この式の両辺を x で微分します：

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = \frac{d}{dx} x \ .$$

この等式の左辺は，合成関数の微分法より

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big)\, g'(x) \ ,$$

右辺は $\dfrac{d}{dx} x = 1$ ；従って

$$f'\big(g(x)\big)\, g'(x) = 1 \ .$$

よって， $f'\big(g(x)\big) \neq 0$ ならば

$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)} \ .$$

こうして次の定理が導かれました：関数 g が微分可能な関数 f の逆関数であるとき， $f'\big(g(x)\big) \neq 0$ となる範囲で g も微分可能で,

$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)} \quad \left(f'\big(g(x)\big) \neq 0 \right) .$$