

第3章の補遺2 対数微分法

関数 f, g は微分可能で $f(x) > 0$ とします。関数 $f(x)^{g(x)}$ を微分します。そのために、 $y = f(x)^{g(x)}$ とおいて、 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)^{g(x)}$ を求めます。 $y = f(x)^{g(x)}$ の自然対数をとると、

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x) .$$

微分すると

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \{g(x) \ln f(x)\} .$$

この等式の左辺は

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} ;$$

右辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{g(x) \ln f(x)\} &= \frac{d}{dx} g(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \frac{d}{dx} \{\ln f(x)\} \\ &= g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x) \\ &= g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} ; \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} , \\ \frac{dy}{dx} &= y \left\{ g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right\} . \end{aligned}$$

このようにして $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)^{g(x)}$ を求めることができます。このような微分法を対数微分法といいます。

例題 変数 x の関数 $x^{\sin x}$ を微分する。

【解説】 $y = x^{\sin x}$ とおく。対数の性質より、

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x .$$

従って

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (\sin x \ln x) .$$

この等式の左辺は、合成関数の微分公式より、

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} ,$$

右辺は

$$\frac{d}{dx} (\sin x \ln x) = \frac{d}{dx} \sin x \cdot \ln x + \sin x \frac{d}{dx} \ln x = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} ;$$

従って、

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} , \\ \frac{dy}{dx} &= y \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) , \end{aligned}$$

$y = x^{\sin x}$ なので

$$\frac{d}{dx} x^{\sin x} = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) . \quad \square$$

問題 3.補遺2.1 変数 x の関数 x^x を微分します。 $y = x^x$ とおきます。対数の性質より、

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x .$$

従って

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln x) .$$

この両辺を計算して $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい。

問題 3.補遺2.2 以下の変数 x の関数を微分しなさい。

- (1) $x^{\ln x}$. (2) $x^{\frac{1}{x}}$. (3) $(\sin x + 2)^x$.