

## § 4.1 関数の極限

解析学では、0.0節で述べたように、正の無限大とよばれる  $+\infty$  と負の無限大とよばれる  $-\infty$  との2つの仮想的な数を用います。正の無限大  $+\infty$  はよく  $\infty$  と略記されます。  $\infty$  と  $-\infty$  とは実数ではありません。更に、

$\infty$  及び  $-\infty$  に対する四則演算は全くできません。

大小関係については、 $\infty$  はどんな実数よりも大きく、 $-\infty$  はどんな実数よりも小さいと約束します。つまり、任意の実数  $x$  に対して  $-\infty < x < \infty$  です。

変数  $x$  について、例えば

$$x = 54, \quad x = 645, \quad x = 7645, \quad x = 87564, \quad x = 986754, \quad \dots$$

のように、 $x$  の値を限りなく大きくしていくことを  $x \rightarrow \infty$  と書き表します。また、例えば

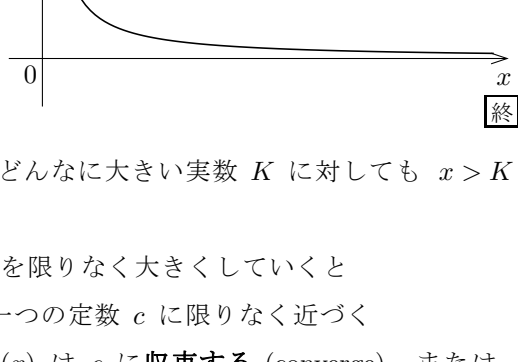
$$x = -54, \quad x = -645, \quad x = -7564, \quad x = -86745, \quad x = -978456, \quad \dots$$

のように、 $x < 0$  として  $x$  の絶対値  $|x|$  の値を限りなく大きくしていくことを  $x \rightarrow -\infty$  と書き表します。

**例解** 変数  $x$  の関数  $\frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) について、 $x$  の値を大きくしていくと、例えば次のようになります：

$$\frac{1}{10} = 0.1, \quad \frac{1}{100} = 0.01, \quad \frac{1}{1000} = 0.001, \quad \frac{1}{10000} = 0.0001, \quad \dots$$

変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと  $\frac{1}{x}$  の値は 0 に限りなく近づきます。このことを、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{1}{x}$  は 0 に収束するといひ、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{1}{x}$  が限りなく近づいていく定数 0 を  $\frac{1}{x}$  の極限值といひます。



一般的に述べます。関数  $f$  について、どんなに大きい実数  $K$  に対しても  $x > K$  となる  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、

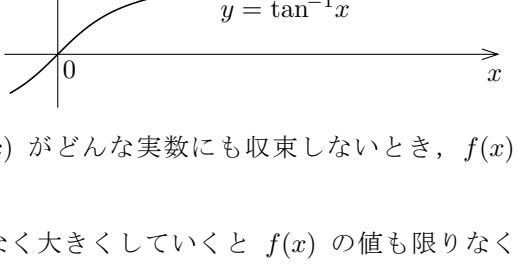
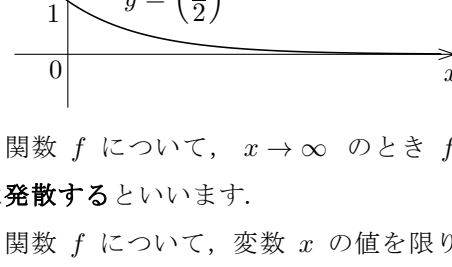
$f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくとき  $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づくと

とき、 $x$  の値を限りなく大きくすると  $f(x)$  は  $c$  に収束する (converge)、または、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、 $c$  を  $f(x)$  の極限 (値) (limit value) といひます； $x \rightarrow \infty$  のときの  $f(x)$  の極限値を  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  と書き表します：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c.$$

例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$



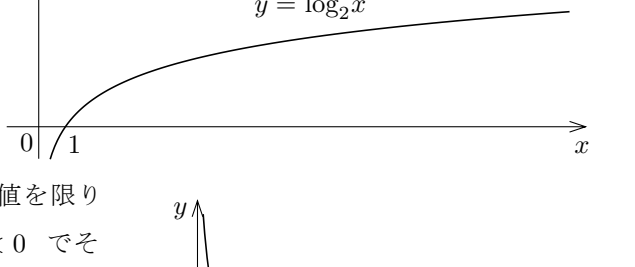
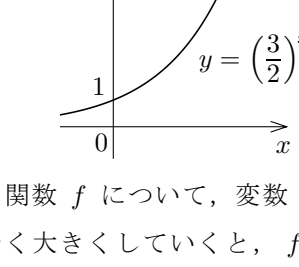
関数  $f$  について、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  がどんな実数にも収束しないとき、 $f(x)$  は発散するといひます。

関数  $f$  について、変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと  $f(x)$  の値も限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

と書き表します。例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 x = \infty.$$

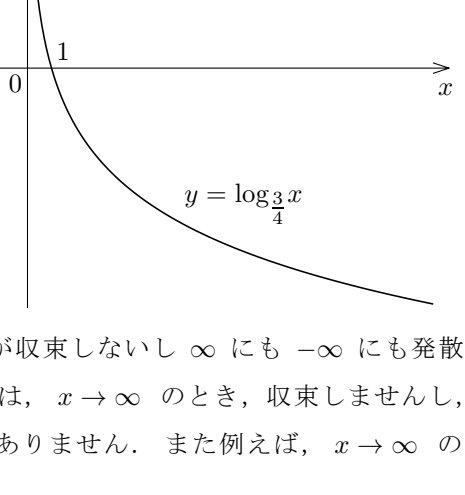


関数  $f$  について、変数  $x$  の値を限りなく大きくしていくと、 $f(x) < 0$  でその絶対値  $|f(x)|$  が限りなく大きくなるとき、 $x \rightarrow \infty$  のとき  $f(x)$  は負の無限大に発散するといひ、

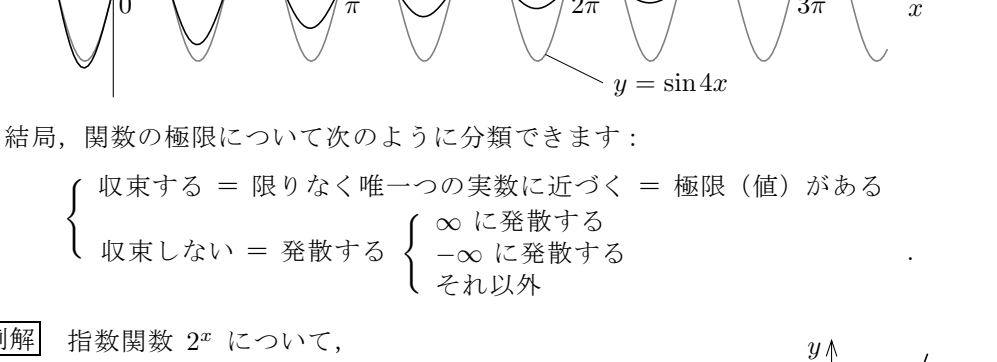
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表します。例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{3}{4}} x = -\infty.$$



関数  $f$  について、 $x \rightarrow \infty$  のとき、 $f(x)$  が収束しないし  $\infty$  にも  $-\infty$  にも発散しないこともあります。例えば、関数  $\sin 4x$  は、 $x \rightarrow \infty$  のとき、収束しませんし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 4x = \infty$  でも  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin 4x = -\infty$  でもありません。また例えば、 $x \rightarrow \infty$  のとき、 $\left(\frac{4}{5}\right)^x \sin 4x$  は 0 に収束します。

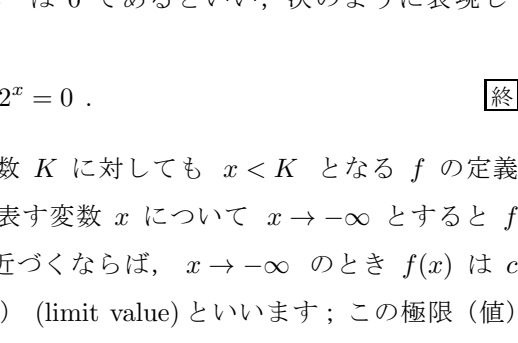


結局、関数の極限について次のように分類できます：

- 収束する = 限りなく唯一つの実数に近づく = 極限 (値) がある
- 収束しない = 発散する
  - $\infty$  に発散する
  - $-\infty$  に発散する
  - それ以外

**例解** 指数関数  $2^x$  について、

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5, \\ 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125, \\ 2^{-10} = \frac{1}{1024} \approx 0.0009766, \\ \vdots$$



のように、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $2^x$  の値は 0 に限りなく近づきます。このようなとき、 $x \rightarrow -\infty$  のときの  $2^x$  の極限値  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$  は 0 であるといひ、次のように表現します：

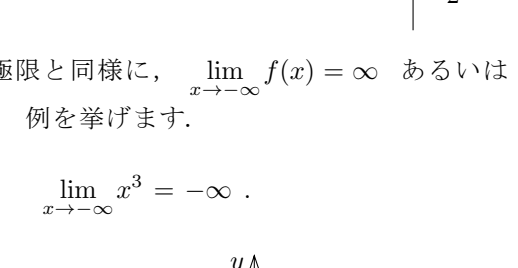
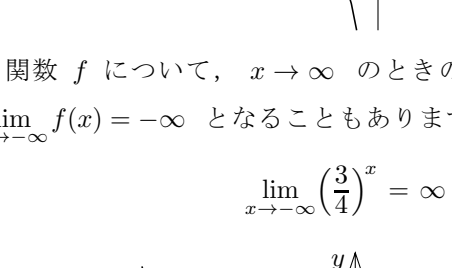
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0.$$

一般的に、関数  $f$  について、どんな実数  $K$  に対しても  $x < K$  となる  $f$  の定義域の実数  $x$  があり、 $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  について  $x \rightarrow -\infty$  とすると  $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づけば、 $x \rightarrow -\infty$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、 $c$  を  $f(x)$  の極限 (値) (limit value) といひます；この極限 (値) を  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  と書き表します：

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c.$$

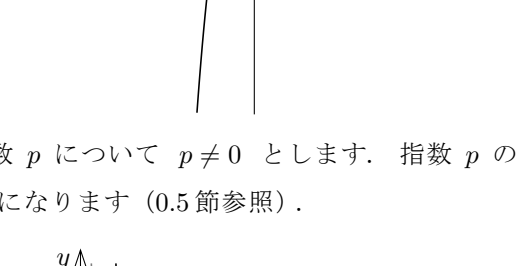
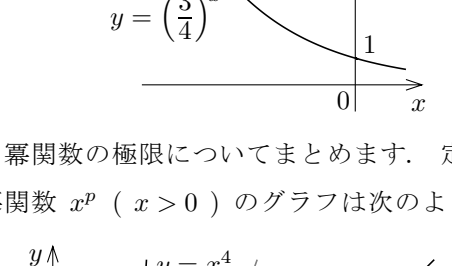
例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}.$$

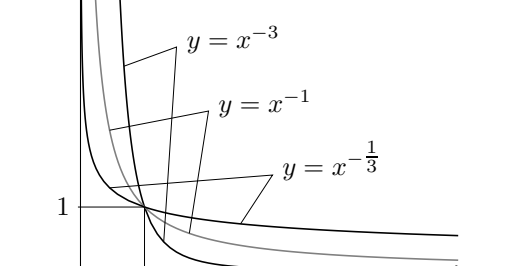
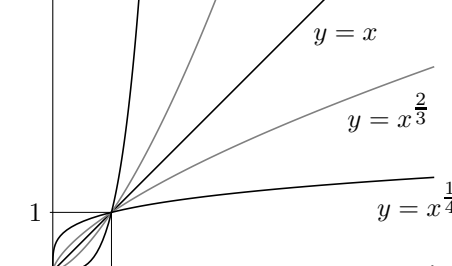


関数  $f$  について、 $x \rightarrow \infty$  のときの極限と同様に、 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$  あるいは  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  となることもあります。例を挙げます。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$



冪関数の極限についてまとめます。定数  $p$  について  $p \neq 0$  とします。指数  $p$  の冪関数  $x^p$  ( $x > 0$ ) のグラフは次のようになります (0.5節参照)。



これらのグラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

**定理** 定数  $p$  について  $p \neq 0$  とする。  $p$  を指数とする冪関数  $x^p$  ( $x > 0$ ) について、

$$p > 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} x^p = \infty, \quad p < 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} x^p = 0.$$

**例題** 変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x^4}}$  及び  $\frac{\sqrt[8]{x^7}}{\sqrt[3]{x^4}}$  について、 $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べる。

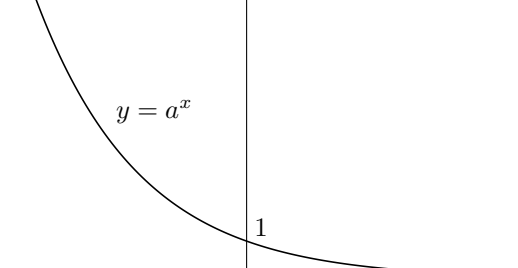
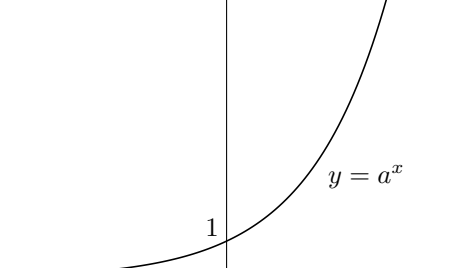
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{9/5}}{x^{4/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{9/5 - 4/3} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{7/15} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{x^7}}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{7/8}}{x^{4/3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{7/8 - 4/3} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-11/24} = 0.$$

**問題 4.1.1**

変数  $x$  の関数  $\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x^9}}$  及び  $\frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[5]{x^8}}$  について、 $x \rightarrow \infty$  のときの極限を調べなさい。

指数関数の極限を考えます。定数  $a$  について  $a > 0$ 、 $a \neq 1$  とします。  $a$  を底とする指数関数  $y = a^x$  のグラフは次のようになります (0.6節参照)。



これらグラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

**定理** 定数  $a$  について  $a > 0$ 、 $a \neq 1$  とする。  $a$  を底とする指数関数  $a^x$  について、

$$a > 1 \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0; \\ 0 < a < 1 \text{ のとき, } \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty.$$

**例題** 変数  $x$  の関数  $\frac{5^x}{4^x}$  及び  $\frac{6^x}{7^x}$  について、 $x \rightarrow \infty$  のときの極限及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べる。

指数法則より  $\frac{5^x}{4^x} = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ 。  $\frac{5}{4} > 1$  なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^x = 0.$$

指数法則より  $\frac{6^x}{7^x} = \left(\frac{6}{7}\right)^x$ 。  $0 < \frac{6}{7} < 1$  なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{7}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^x = \infty.$$

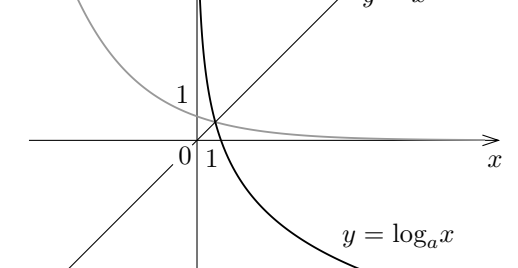
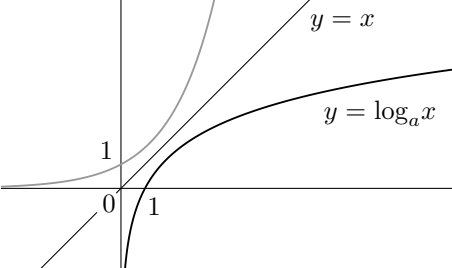
**問題 4.1.2**

変数  $x$  の関数  $\frac{5^x}{6^x}$  について、 $x \rightarrow \infty$  のときの極限及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べなさい。

**問題 4.1.3**

変数  $x$  の関数  $\frac{4^x}{3^x}$  について、 $x \rightarrow \infty$  のときの極限及び  $x \rightarrow -\infty$  のときの極限を調べなさい。

対数関数の極限を考えます。定数  $a$  は実数で  $a > 0$ 、 $a \neq 1$  とします。  $a$  を底とする対数関数  $y = \log_a x$  ( $x > 0$ ) のグラフは次のようになります (0.7節参照)。



これらグラフから分かるように次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

**定理** 定数  $a$  について  $a > 0$ 、 $a \neq 1$  とする。  $a$  を底とする対数関数  $\log_a x$  ( $x > 0$ ) について、

$$a > 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty, \quad 0 < a < 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty.$$