§4.1　関数の極限

解析学では，0.0 節で述べたように，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 つの仮想的な数を用います．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記されます．∞ と $-\infty$ とは実数ではありません．更に，

$$\infty \text{ 及び } -\infty \text{ に対する四則演算は全くできません.}$$

大小関係については，∞ はどんな実数よりも大きく，$-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束します．つまり，任意の実数 x に対して $-\infty < x < \infty$ です．

変数 x について，例えば

$$x = 54\ , \quad x = 645\ , \quad x = 7645\ , \quad x = 87564\ , \quad x = 986754\ , \quad \cdots$$

のように，x の値を限りなく大きくしていくことを $x \to \infty$ と書き表します．また，例えば

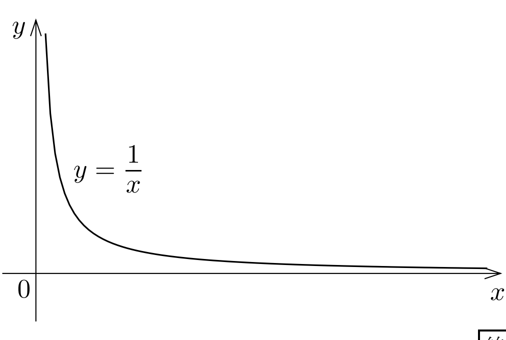
$$x = -54\ , \quad x = -645\ , \quad x = -7564\ , \quad x = -86745\ , \quad x = -978456\ , \quad \cdots$$

のように，$x < 0$ として x の絶対値 $|x|$ の値を限りなく大きくしていくことを $x \to -\infty$ と書き表します．

例解　変数 x の関数 $\dfrac{1}{x}$ ($x > 0$) について，x の値を大きくしていくと，例えば次のようになります：

$$\frac{1}{10} = 0.1\ , \quad \frac{1}{100} = 0.01\ , \quad \frac{1}{1000} = 0.001\ , \quad \frac{1}{10000} = 0.0001\ , \quad \cdots\ .$$

変数 x の値を限りなく大きくしていくと $\dfrac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づきます．このことを，$x \to \infty$ のときの $\dfrac{1}{x}$ の極限値は 0 であるといいます．$x \to \infty$ のときの $\dfrac{1}{x}$ の極限値を $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ と書き表します：



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\ .$$

終

一般的に述べます．関数 f について，どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ となる f の定義域の実数 x があり，

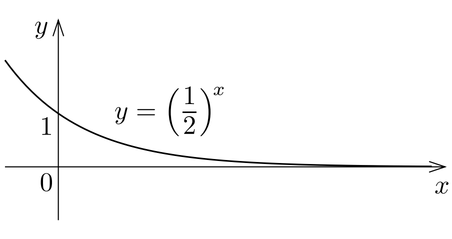
f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと
f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

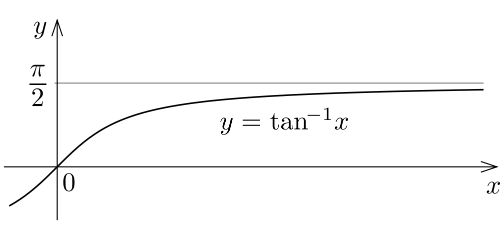
とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に**収束する** (converge)，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の**極限（値）** (limit value) といいます；$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c\ .$$

例を挙げます．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0\ , \qquad \lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}\ .$$





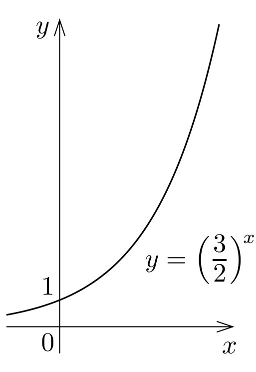
関数 f について，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$f(x)$ は**発散する**といいます．

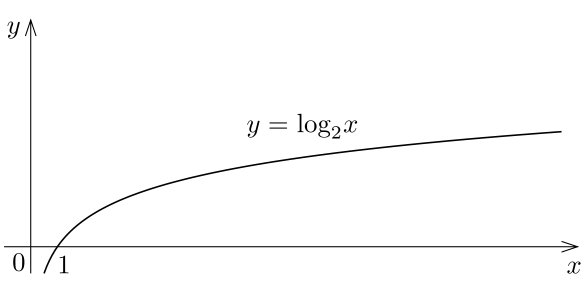
関数 f について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

と書き表します．例を挙げます．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty\ , \qquad \lim_{x\to\infty}\log_2 x = \infty\ .$$



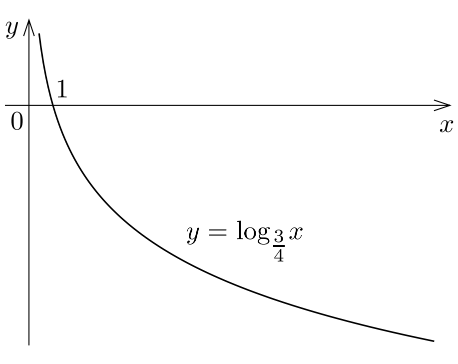


関数 f について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといい，

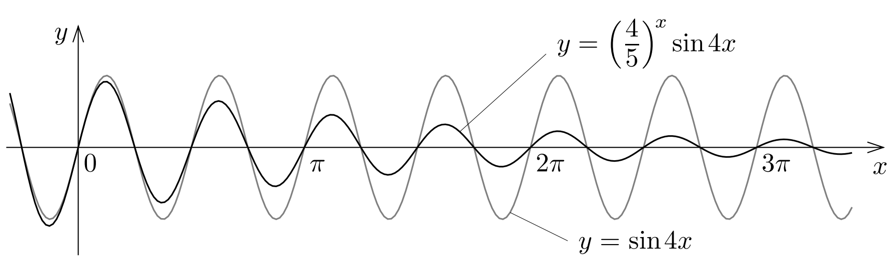
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表します．例を挙げます．

$$\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{3}{4}} x = -\infty\ .$$



関数 f について，$x \to \infty$ のとき，$f(x)$ が収束しないし ∞ にも $-\infty$ にも発散しないこともあります．例えば，関数 $\sin 4x$ は，$x \to \infty$ のとき，収束しませんし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin 4x = \infty$ でも $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin 4x = -\infty$ でもありません．また例えば，$x \to \infty$ のとき，$\left(\dfrac{4}{5}\right)^x \sin 4x$ は 0 に収束します．

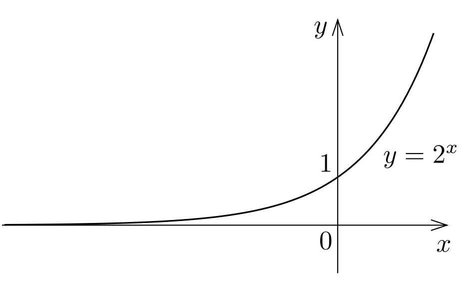


結局，関数の極限について次のように分類できます：

$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{限りなく唯一つの実数に近づく} = \text{極限（値）がある} \\ \text{収束しない} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{cases} \end{cases}$$

例解　指数関数 2^x について，

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5\ ,$$
$$2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125\ ,$$
$$2^{-10} = \frac{1}{1024} \fallingdotseq 0.0009766\ ,$$
$$\vdots$$



のように，$x \to -\infty$ のとき 2^x の値は 0 に限りなく近づきます．このようなとき，$x \to -\infty$ のときの 2^x の極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$ は 0 であるといい，次のように表現します：

$$\lim_{x\to-\infty}2^x = 0\ .$$

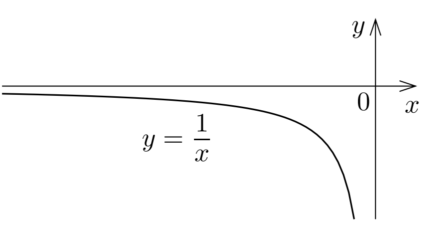
終

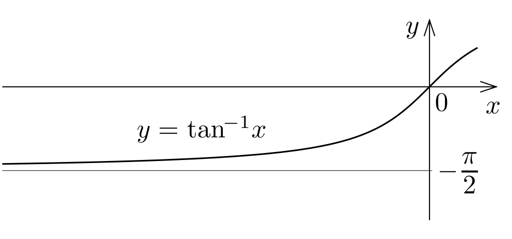
一般的に，関数 f について，どんな実数 K に対しても $x < K$ となる f の定義域の実数 x があり，f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づくならば，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値） (limit value) といいます；この極限（値）を $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = c\ .$$

例を挙げます．

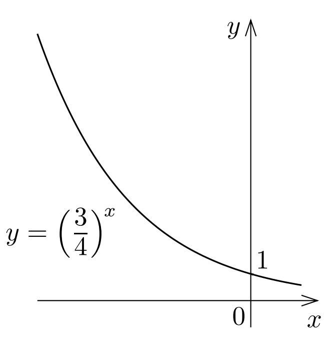
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2}\ .$$

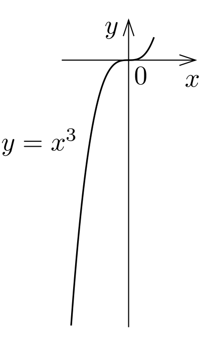




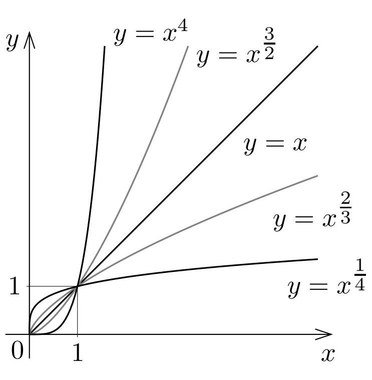
関数 f について，$x \to \infty$ のときの極限と同様に，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ あるいは $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ となることもあります．例を挙げます．

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x = \infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}x^3 = -\infty\ .$$

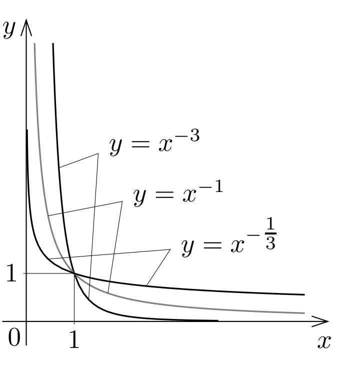




冪関数の極限についてまとめます．定数 p は実数で $p \neq 0$ とします．指数 p の冪関数 x^p ($x > 0$) のグラフは次のようになります（0.5 節参照）．



$p > 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ



$p < 0$ のときの $y = x^p$ のグラフ

これらのグラフから分かるように次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理冪関数 x^p ($x > 0$) について：

$$p > 0 \text{ のとき } \lim_{x\to\infty}x^p = \infty\ , \qquad p < 0 \text{ のとき } \lim_{x\to\infty}x^p = 0\ .$$

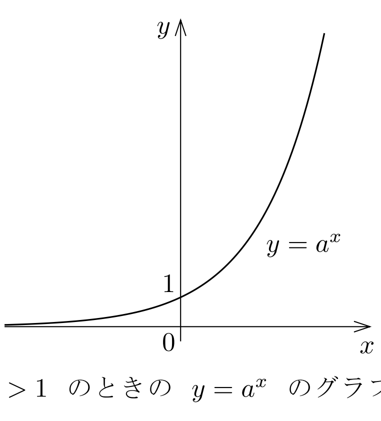
例題　変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べなさい．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty}x^{\frac{9}{5}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty}x^{\frac{7}{15}} = \infty\ .$$

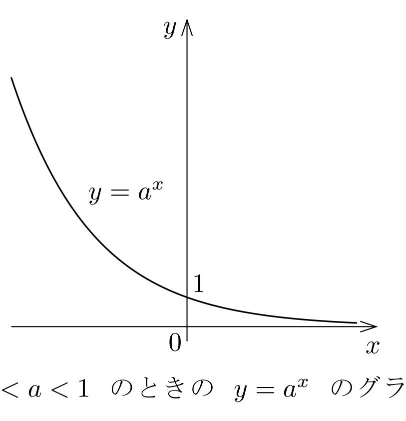
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{7}{8}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty}x^{\frac{7}{8}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty}x^{-\frac{11}{24}} = 0\ .$$

問題 4.1.1　変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べなさい．

指数関数の極限についてまとめます．定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします．a を底とする指数関数 $y = a^x$ のグラフは次のようになります（0.6 節参照）．



$a > 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ

これらグラフから分かるように，指数関数 a^x について次の定理が成り立ちます（証明は省略します）：

$$a > 1 \text{ のとき，} \quad \lim_{x\to\infty}a^x = \infty\ , \quad \lim_{x\to-\infty}a^x = 0\ ;$$
$$0 < a < 1 \text{ のとき，} \quad \lim_{x\to\infty}a^x = 0\ , \quad \lim_{x\to-\infty}a^x = \infty\ .$$

例題　変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{4^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．

指数法則より $\dfrac{5^x}{4^x} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$ ．$\dfrac{5}{4} > 1$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x = \infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x = 0\ .$$

終

例題　変数 x の関数 $\dfrac{6^x}{7^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．

指数法則より $\dfrac{6^x}{7^x} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^x$ ．$0 < \dfrac{6}{7} < 1$ なので，

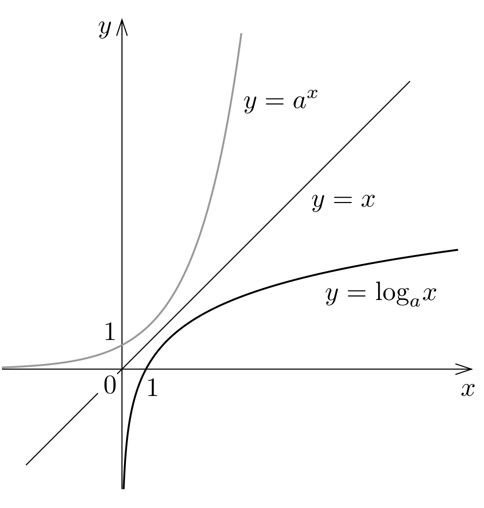
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^x = 0\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^x = \infty\ .$$

終

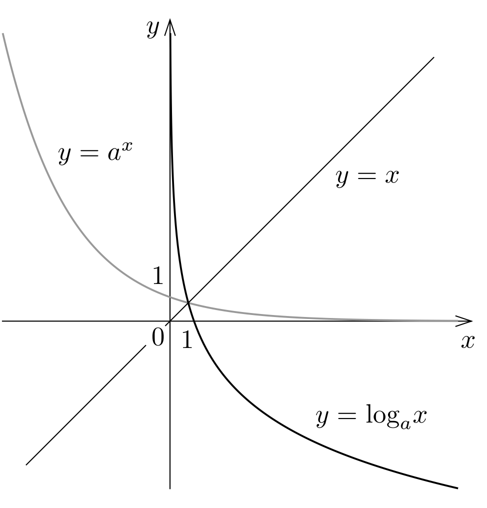
問題 4.1.2　変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{6^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べなさい．

問題 4.1.3　変数 x の関数 $\dfrac{4^x}{3^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べなさい．

対数関数の極限についてまとめます．定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とします．a を底とする対数関数 $y = \log_a x$ ($x > 0$) のグラフは次のようになります（0.7 節参照）．



$a > 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ

これらグラフから分かるように，対数関数 $\log_a x$ について次の定理が成り立ちます（証明は省略します）：

$$a > 1 \text{ のとき } \lim_{x\to\infty}\log_a x = \infty\ , \qquad 0 < a < 1 \text{ のとき } \lim_{x\to\infty}\log_a x = -\infty\ .$$