§4.2　関数の極限の性質

2.3 節の定理 2.3.1, 定理 2.3.2, 定理 2.3.3 は， $x\to\infty$ ， $x\to-\infty$ の場合もそのまま成り立ちます.

> **定理** 4.2.1　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする． 関数 f と g とについて， $x\to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,
> $$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}\pm\left\{\lim_{x\to a}g(x)\right\}\quad（複号同順）\ ,$$
> $$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a}g(x)\right\}\ ;$$
> $x\to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ ならば,
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}\ .$$

この定理より，例えば次のことが導かれます：変数 x と無関係な定数 k について， $\lim_{x\to\infty}k=k$ なので，関数 f について $x\to\infty$ のとき $f(x)$ が収束するならば,

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)+k\}=\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}+\lim_{x\to\infty}k=\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}+k\ ,$$
$$\lim_{x\to\infty}\{kf(x)\}=\left(\lim_{x\to\infty}k\right)\lim_{x\to\infty}f(x)=k\lim_{x\to\infty}f(x)\ .$$

> **定理** 4.2.2　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする． 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする． $x\to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a}f(x)$ において関数 g が連続であるならば,
> $$\lim_{x\to a}g\big(f(x)\big)=g\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)\ .$$

> **定理** 4.2.3　定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする． 変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて， $f(x)=g(y)$ で， $x\to a$ のとき $y\to b$ ， $y\neq b$ とする． $y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,
> $$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{y\to b}g(y)\ .$$

定理 4.2.3 より次の定理が導かれます.

定理 4.2.4　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする． また， f は関数で，定数 k は実数とする． $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ のとき $\lim_{x\to a}\dfrac{k}{f(x)}=0$.

証明　$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ とする． $y=f(x)$ とおくと， $x\to a$ のとき $y\to\infty$ なので,

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)}=\lim_{y\to\infty}\frac{k}{y}=k\lim_{y\to\infty}y^{-1}=k\cdot 0=0\ .$$

$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ とする． $y=-f(x)$ とおくと， $x\to a$ のとき $f(x)\to-\infty$ より $y\to\infty$ なので,

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)}=\lim_{y\to\infty}\frac{k}{-y}=-k\lim_{y\to\infty}y^{-1}=-k\cdot 0=0\ .$$

（証明終り）

$\boxed{例題}$　変数 x の関数 $\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$ について， $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^2}=0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)=9+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=9+0=9\ .$$

9 において関数 $\sqrt{x}$ は連続なので,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)}=\sqrt{9}=3\ .\qquad\boxed{終}$$

$\boxed{問題\ 4.2.1}$　変数 x の関数 $\log_3\left(81+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について， $x\to\infty$ のときの極限を調べなさい.

$\boxed{例題}$　変数 x の関数 $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について， $x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$y=2x-5$ とおく． $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x-5}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{y}$ ． $x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y}=\infty\ .$$

$x\to-\infty$ のとき $y\to-\infty$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}=\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y}=0\ .\qquad\boxed{終}$$

$\boxed{問題\ 4.2.2}$　変数 x の関数 $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について， $x\to\infty$ のときの及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べなさい.

$\boxed{問題\ 4.2.3}$　変数 y の関数 $\left(\dfrac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について， $y\to\infty$ のとき及び $y\to-\infty$ のときの極限を調べなさい.

$\boxed{例題}$　変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について， $t\to\infty$ のとき及び $t\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\dfrac{\pi}{2}$ なので,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t}{3}=\frac{\frac{\pi}{2}}{3}=\frac{\pi}{6}\ .$$

$\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

$\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t=-\dfrac{\pi}{2}$ なので,

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t}{3}=\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}=-\frac{\pi}{6}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to-\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\ .\qquad\boxed{終}$$

$\boxed{問題\ 4.2.4}$　変数 y の関数 $\cos\left(\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について， $y\to\infty$ のとき及び $y\to-\infty$ のときの極限を調べなさい.

$\boxed{例題}$　変数 x の関数 $x\sin\dfrac{2}{x}$ について， $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

$y=\dfrac{2}{x}$ とおく． $x=\dfrac{2}{y}$ なので

$$x\sin\frac{2}{x}=\frac{2}{y}\sin y=2\frac{\sin y}{y}\ .$$

$x\to\infty$ のとき $y\to 0$ ． $\lim_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{2}{x}\right)=\lim_{y\to 0}\left(2\frac{\sin y}{y}\right)=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2\ .\qquad\boxed{終}$$

$\boxed{問題\ 4.2.5}$　変数 y の関数 $y\sin\dfrac{3}{2y}$ について， $y\to-\infty$ のときの極限を調べなさい.

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とします． 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて， $x\to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するときは，定理 4.2.1 より次のような計算ができます：

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}+\left\{\lim_{x\to a}g(x)\right\}\ ,$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\left\{\lim_{x\to a}f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a}g(x)\right\}\ .$$

しかし， $x\to a$ のとき $f(x)$ あるいは $g(x)$ が発散するときは，このように $\lim$ を分けることができません． 例えば， $x\to\infty$ のとき x^3 及び x^2 は ∞ に発散するので， $\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)$ を $\lim_{x\to\infty}x^3-\lim_{x\to\infty}x^2$ に変形するのは間違いです；このときは x^3-x^2 自体の極限を考えなければなりません.

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とします． 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことは一般的にいえます.

(1)　$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば， $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\infty$.

(2)　$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x\to a}g(x)>0$ ならば, $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\infty$ ， $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

(3)　$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x\to a}g(x)<0$ ならば, $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=-\infty$ ， $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

(4)　$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ かつ $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ ならば， $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\infty$ ， $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\infty$.

$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ かつ $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ のとき， $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$ および $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ はどうなるか一般的には分かりません． また， $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ かつ $\lim_{x\to a}g(x)=0$ のとき， $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}$ はどうなるか一般的には分かりません.

$\boxed{例題}$　変数 y の関数 $2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{y}-7$ について， $y\to\infty$ のときの極限を調べる.

$\dfrac{5}{4}>1$ より $\lim_{y\to\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^{y}=\infty$ なので， $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{y}\right\}=\infty$ ，よって $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{y}-7\right\}=\infty$.　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 4.2.6}$　変数 u の関数 $5\left(\dfrac{6}{7}\right)^{u}+8$ について， $u\to-\infty$ のときの極限を調べなさい.

$\boxed{問題\ 4.2.7}$　変数 y の関数 $\left(\dfrac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y$ について， $y\to\infty$ のときの極限を調べなさい.

$\boxed{例題}$　変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について， $x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x}=\frac{7^x}{9^x}+\frac{7^x}{9^x}=\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\ .$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{7}{9}\right)^x=0$ ， $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^x=0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0\ .$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{7}{9}\right)^x=\infty$ ， $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{8}{9}\right)^x=\infty$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\infty\ .\qquad\boxed{終}$$

$\boxed{問題\ 4.2.8}$　変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について， $x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べなさい.