§4.2　関数の極限の性質

2.3節の定理2.3.1, 定理2.3.2, 定理2.3.3 は, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ の場合もそのまま成り立ちます.

定理 4.2.1　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 関数 f と g とについて, $x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば,

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）} ,$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} .$$

この定理より, 例えば次のことが導かれます: 変数 x と無関係な定数 k について, $\lim_{x\to\infty} k = k$ なので, 関数 f について $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束するならば,

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)+k\} = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\} + \lim_{x\to\infty} k = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\} + k ,$$
$$\lim_{x\to\infty}\{k\,f(x)\} = \left(\lim_{x\to\infty} k\right)\lim_{x\to\infty} f(x) = k\lim_{x\to\infty} f(x) .$$

定理 4.2.2　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする. 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. $x \to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば,

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) .$$

定理 4.2.3　定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて, $f(x) = g(y)$ で, $x \to a$ のとき $y \to b$, $y \neq b$ とする. $y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y) .$$

定理4.2.3より次の定理が導かれます.

定理 4.2.4　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. また, f は関数で, 定数 k は実数とする. $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ のとき $\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)} = 0$.

証明　$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ とする. $y = f(x)$ とおくと, $x \to a$ のとき $y \to \infty$ なので,

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)} = \lim_{y\to\infty}\frac{k}{y} = k\lim_{y\to\infty} y^{-1} = k\cdot 0 = 0 .$$

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ とする. $y = -f(x)$ とおくと, $x \to a$ のとき $f(x) \to -\infty$ より $y \to \infty$ なので,

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)} = \lim_{y\to\infty}\frac{k}{-y} = -k\lim_{y\to\infty} y^{-1} = -k\cdot 0 = 0 .$$

（証明終り）

例題　変数 x の関数 $\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}$ について, $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right) = 9 + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 9+0 = 9 .$$

9 において関数 $\sqrt{x}$ は連続なので,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{9+\frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)} = \sqrt{9} = 3 .$$

終

問題 4.2.1　変数 x の関数 $\log_3\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について, $x \to \infty$ のときの極限を調べなさい.

例題　変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$y = 2x-5$ とおく. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{y}$. $x \to \infty$ のとき $y \to \infty$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = \infty .$$

$x \to -\infty$ のとき $y \to -\infty$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = 0 .$$

終

問題 4.2.2　変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について, $x \to \infty$ のときの及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べなさい.

問題 4.2.3　変数 y の関数 $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について, $y \to \infty$ のとき及び $y \to -\infty$ のときの極限を調べなさい.

例題　変数 t の関数 $\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について, $t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$ なので,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t}{3} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6} .$$

$\frac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} .$$

$\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2}$ なので,

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t}{3} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{3} = -\frac{\pi}{6} .$$

$-\frac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to-\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} .$$

終

問題 4.2.4　変数 y の関数 $\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について, $y \to \infty$ のとき及び $y \to -\infty$ のときの極限を調べなさい.

例題　変数 x の関数 $x\sin\frac{2}{x}$ について, $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$y = \frac{2}{x}$ とおく. $x = \frac{2}{y}$ なので

$$x\sin\frac{2}{x} = \frac{2}{y}\sin y = 2\frac{\sin y}{y} .$$

$x \to \infty$ のとき $y \to 0$. $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{2}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\left(2\frac{\sin y}{y}\right) = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2\cdot 1 = 2 .$$

終

問題 4.2.5　変数 y の関数 $y\sin\frac{3}{2y}$ について, $y \to -\infty$ のときの極限を調べなさい.

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とします. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて, $x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するときは, 定理4.2.1より次のような計算ができます:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} + \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} ,$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} .$$

しかし, $x \to a$ のとき $f(x)$ あるいは $g(x)$ が発散するときは, このように lim を分けることができません. 例えば, $x \to \infty$ のとき x^3 及び x^2 は ∞ に発散するので, $\lim_{x\to\infty}(x^3-x^2)$ を $\lim_{x\to\infty} x^3 - \lim_{x\to\infty} x^2$ に変形するのは間違いです; このときは x^3-x^2 自体の極限を考えなければなりません.

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とします. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことは一般的にいえます.

(1)　$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば, $\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \infty$.

(2)　$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ ならば, $\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \infty$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

(3)　$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ ならば, $\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = -\infty$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

(4)　$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ならば, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\} = \infty$, $\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\} = \infty$.

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ のとき, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$ および $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ はどうなるか一般的には分かりません. また, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ のとき, $\lim_{x\to a}\{f(x)\,g(x)\}$ はどうなるか一般的には分かりません.

例題　変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^{y} - 7$ について, $y \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4} > 1$ より $\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{y} = \infty$ なので, $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y}\right\} = \infty$, よって $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^{y} - 7\right\} = \infty$.

終

問題 4.2.6　変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^{u} + 8$ について, $u \to -\infty$ のときの極限を調べなさい.

問題 4.2.7　変数 y の関数 $\left(\frac{5}{y^2} - 3\right)\log_2 y$ について, $y \to \infty$ のときの極限を調べなさい.

例題　変数 x の関数 $\frac{7^x+8^x}{9^x}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{7^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^{x} + \left(\frac{8}{9}\right)^{x} .$$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{x} = 0$, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{x} = 0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^{x} + \left(\frac{8}{9}\right)^{x}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{x} + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{x} = 0 .$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^{x} = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{x} = \infty$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^{x} + \left(\frac{8}{9}\right)^{x}\right\} = \infty .$$

終

問題 4.2.8　変数 x の関数 $\frac{4^x+5^x}{6^x}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べなさい.