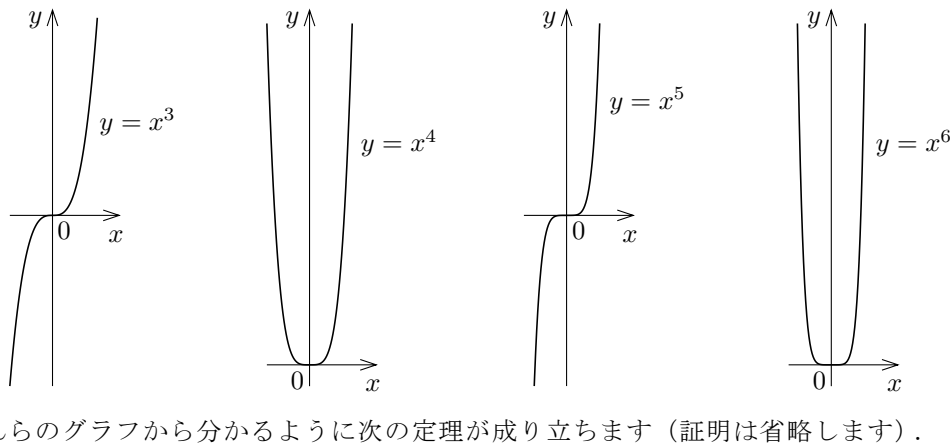


§4.3 有理整関数・有理関数などの極限

定数 n は正の自然数とします。 xy 座標平面において冪関数 $y = x^n$ のグラフは次のようになります。



これらのグラフから分かるように次の定理が成り立ちます（証明は省略します）。

定理 定数 n は正の自然数とする。 n を指数とする冪関数 x^n について、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \infty & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

この定理と定理4.2.4より、定数 k 及び自然数を表す定数 n について、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0.$$

$x \rightarrow \pm\infty$ のときの有理整関数 $f(x)$ の極限を求めるためには、 $f(x)$ を表す整式において最高次の x の冪を括り出します。

例題 変数 x の関数 $3x^2 - 7x + 4$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

【解説】 x の2次式 $3x^2 - 7x + 4$ において最高次の x の冪 x^2 を括り出す：

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3.$$

更に $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right\} = \infty. \quad \text{終}$$

例題 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ について、 $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる。

【解説】 x の3次式 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す：

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \frac{x^3}{5} \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{x^3}{5} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = 2 - 0 - 0 + 0 = 2;$$

更に $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5} = -\infty$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{x^3}{5} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) \right\} = -\infty. \quad \text{終}$$

問題 4.3.1 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 4x + 5}{3}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べなさい。

問題 4.3.2 変数 x の関数 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5$ について、 $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べなさい。

次数が1以上である有理整関数 f について、 $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のとき、 $f(x)$ は ∞ か $-\infty$ かのどちらかに発散します。

整式 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して、分数式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ で表される関数の $x \rightarrow \pm\infty$ のときの極限を求めるためには、分子 $P(x)$ も分母 $Q(x)$ も最高次の x の冪を括り出します。

例題 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4}$ について、 $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる。

【解説】 分子と分母とにおいて x^2 を括り出す：

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}}.$$

従って

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 - 0} = \frac{2}{3}. \quad \text{終}$$

例題 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

【解説】 分子において x^2 を、分母において x^3 を括り出す：

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^3 \left(3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}}.$$

$x \rightarrow \infty$ とする：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 - 0 + 0} = \frac{2}{3}.$$

従って

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \right) = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0. \quad \text{終}$$

例題 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

【解説】 分子において x^3 を、分母において x^2 を括り出す：

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{x^3 \left(2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = x \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

$x \rightarrow \infty$ とする：

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}.$$

従って

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = \infty. \quad \text{終}$$

問題 4.3.3 変数 x の関数 $\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3}$ について、 $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べなさい。

問題 4.3.4 変数 x の関数 $\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べなさい。

問題 4.3.5 変数 x の関数 $\frac{5 - 3x^2}{2x^2 - 4x + 3}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べなさい。

例題 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

【解説】 $x \rightarrow \infty$ のときを考えるので、 $x > 0$ とする。

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x \left(7 + \frac{5}{x} \right)}}{x \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{\sqrt{x} \sqrt{7 + \frac{5}{x}}}{x \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{7 + \frac{5}{x}}}{x \left(3 + \frac{2}{x} \right)} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7 + \frac{5}{x}}}{3 + \frac{2}{x}}.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7 + \frac{5}{x}}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7 + \frac{5}{x}}}{3 + \frac{2}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = 0. \quad \text{終}$$

問題 4.3.6 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べなさい。

例題 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

【解説】 $x \rightarrow \infty$ のときを考えるので、 $x > 0$ とする。 $\sqrt{x^2} = x$.

$$\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} = \frac{\sqrt{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)} = \frac{x \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x} \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \text{終}$$

問題 4.3.7 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5}$ について、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べなさい。