§4.4　関数の連続性

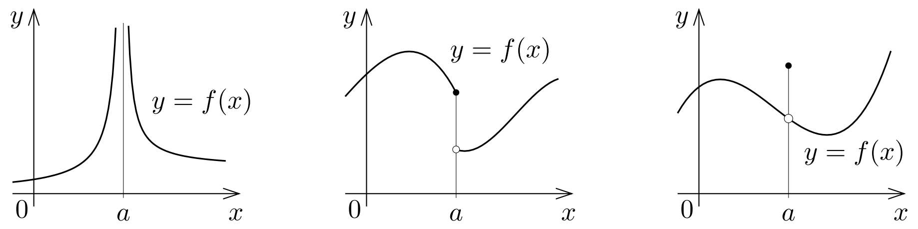
1.2節で述べましたが，関数 f の定義域の実数 a について，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ となるとき，a において f は**連続**であるといいます．詳しくいうと，a において f が連続であるとは次の3条件が成り立つことです：

(1)　a が f の定義域に属して（つまり a に対する f の値 $f(a)$ があって），

(2)　$x\to a$ のとき $f(x)$ が収束して（つまり極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ があって），更に

(3)　$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ となる．

実数 a において関数 f が連続でない状況は，関数のグラフで表現すると，例えば以下のような状況があります．



関数 f が実数 a において連続でない事例

関数 f が連続であるというのは，f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということでした．2.2節で述べたように，冪関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数は総て連続です[1)]．

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-7)}{2x-14} & (\ x\neq 7\ \text{のとき})\\[2mm] \dfrac{1}{2} & (\ x=7\ \text{のとき})\end{cases}\ .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる．

〔方針〕 関数 f が 7 において連続であるとは，$\lim_{x\to 7} f(x)=f(7)$ となることである．この等式が成り立つかどうか調べる．極限値の公式 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を用いる．

〔解答〕　$y=x-7$ とおく．$2x-14=2y$ ．$x\neq 7$ のとき，

$$f(x)=\frac{\sin(x-7)}{2x-14}=\frac{\sin y}{2y}=\frac{1}{2}\frac{\sin y}{y}\ .$$

$x\to 7$ のとき $y=x-7\to 0$ なので，

$$\lim_{x\to 7} f(x)=\lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)}{2x-14}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{2}\frac{\sin y}{y}\right)=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\ .$$

また，$x=7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{2}$ なので $f(7)=\dfrac{1}{2}$ ．$\lim_{x\to 7} f(x)=f(7)$ なので，関数 f は 7 において連続である．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.1}}$　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定めます：

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x-3}\sin(2x-6) & (\ x\neq 3\ \text{のとき})\\[2mm] 5 & (\ x=3\ \text{のとき})\end{cases}\ .$$

この関数 g は 3 において連続であるかどうか調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}} & (\ x\neq 0\ \text{のとき})\\ 2e & (\ x=0\ \text{のとき})\end{cases}\ .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる．

〔方針〕 関数 φ が 0 において連続であるとは，$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\varphi(0)$ となることである．この等式が成り立つかどうか調べる．自然対数の底 e の定義 $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を用いる．

〔解答〕　$x\neq 0$ のとき，

$$\varphi(x)=(1+x)^{\frac{2}{x}}=(1+x)^{\frac{1}{x}2}=\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2\ .$$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ なので，

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2=\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2=e^2\ .$$

また，$x=0$ のとき $\varphi(x)=2e$ なので，$\varphi(0)=2e$ ．従って $\lim_{x\to 0}\varphi(x)\neq\varphi(0)$ ．故に関数 φ は 0 において連続でない．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.4.2}}$　区間 $(-1,\infty)$ を定義域とする関数 ψ を次のように定めます：

$$\psi(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{3}{x}} & (\ x\neq 0\ \text{のとき})\\ e^3 & (\ x=0\ \text{のとき})\end{cases}\ .$$

この関数 ψ は 0 において連続であるかどうか調べなさい．

連続な2つの関数の和・差・積などはやはり連続になります．

定理 4.4.1　関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a において連続であるとする．このとき，関数 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ も実数 a において連続である．更に，$g(a)\neq 0$ ならば，関数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も実数 a において連続である．

証明　例として，関数 $f(x)g(x)$ が実数 a において連続であることを示す．関数 $f(x)$, $g(x)$ は実数 a において連続なので，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)\ ,\qquad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)\ .$$

従って定理1.3.1より

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\}=f(a)g(a)\ .$$

つまり関数 $f(x)g(x)$ は実数 a において連続である．　（証明終り）

更に，連続関数と連続関数との合成関数はやはり連続です．

定理 4.4.2　関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが連続であるならば，$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ も連続である．

区間 I が関数 f の定義域に含まれるとき，I において f が連続であるとは，区間 I の各実数において f が連続であることです．

---

1) 例えば冪関数 x^{-1} つまり $\dfrac{1}{x}$ は 0 において連続ではありません．しかし 0 は定義域に属しません．関数が連続であるということは，定義域に属する各実数において連続であることなので，関数 $\dfrac{1}{x}$ は連続です．