

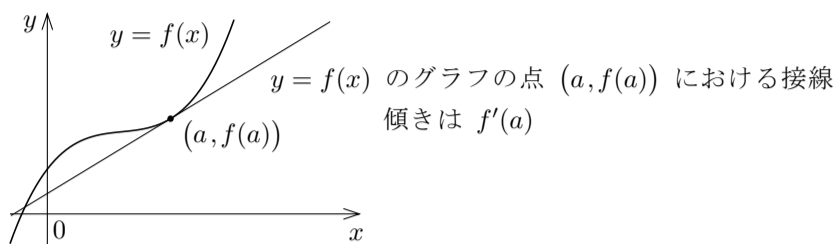
§ 4.5 関数のグラフの接線

2.6節において関数のグラフの接線について述べました。関数のグラフの接線の定義は次のようになります。

座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して、 G に属す動点 T ($T \neq P$) を限りなく P に近づけると、直線 PT の傾きがある実数 m に収束するならば、点 P を通り傾き m の直線を点 P におけるグラフ G の**接線**といい、 P をその接点といいます。

直感的にいうと、曲線の接線とはその曲線に接する直線のことでした。関数 f 及び f の定義域の実数 a について、1.6節において述べたように、 f の a における微分係数は f のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きですから、

f のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは a における f の微分係数 $f'(a)$ です。



関数 f は実数 a において微分可能であるとします。 xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考えます。一般に、

$$\text{点 } (a, b) \text{ を通る傾き } m \text{ の直線を表す方程式は } y = m(x - a) + b \text{ ②}$$

です。 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線は、接点 $(a, f(a))$ を通り、傾きは $f'(a)$ です；従ってその方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ です。

定理 4.5 関数 f が実数 a において微分可能であるとき、 xy 座標平面において、 f のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線がある；その接線を表す方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) .$$

例題 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める。 xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求めよ。

$f(-1) = 3$ なので点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す。

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 .$$

よって $f'(-1) = 6$. 従って $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式は $y = 6(x + 1) + 3$, つまり $y = 6x + 9$. 終

問題 4.5.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 7}{2}$ と定めます。 xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-2, -\frac{3}{2})$ における接線を表す方程式を求めなさい。

例題 区間 $(-\frac{1}{3}, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x + 1)$ と定める。 xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの、 x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求めよ。

$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7$ なので、接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x + 1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \frac{d}{dx}(3x + 1) \\ &= \frac{3}{3x + 1} . \end{aligned}$$

よって $\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7}$. 従って点 $(2, \ln 7)$ における $y = \psi(x)$ の接線を表す方程式は $y = \frac{3}{7}(x - 2) + \ln 7$. 終

問題 4.5.2 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = (\ln x)^2$ と定めます。 xy 座標平面における $y = \varphi(x)$ のグラフの、 x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めなさい。

例題 xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの、 x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求めよ。

$x = \frac{\pi}{6}$ のとき $y = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, 従って接点は $(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4})$. また、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^2 x = -2\sin x \cos x .$$

よって、 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

従って $y = \cos^2 x$ のグラフの点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4})$ における接線を表す方程式は

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4} .$$
終

問題 4.5.3 xy 座標平面における関数 $y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの、 x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい。

②) xy 座標平面において、傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ (c は定数) となる；この直線が点 (a, b) を通るならば、 $x = a$ のとき $y = b$ なので、 $b = ma + c$, $c = b - ma$; よって、点 (a, b) を通る傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$.