§4.5　関数のグラフの接線

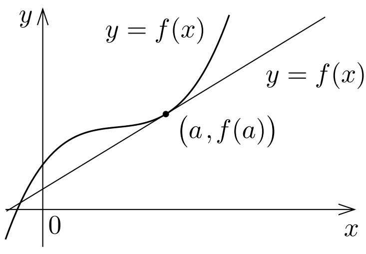
2.6節において関数のグラフの接線について述べました．関数のグラフの接線の定義は次のようになります．

座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T$\neq$P）を限りなく P に近づけるとき，直線 PT の傾きがある実数 m に収束するならば，点 P を通り傾き m の直線を点 P におけるグラフ G の**接線**といい，P をその接点といいます．

直感的にいうと，曲線の接線とはその曲線に接する直線のことでした．関数 f 及び f の定義域の実数 a について，1.6節において述べたように，f の a における微分係数は f のグラフの点 $\big(a,f(a)\big)$ における接線の傾きですから，

f のグラフの点 $\big(a,f(a)\big)$ における接線の傾きは a における f の微分係数 $f'(a)$

です．



関数 f は実数 a において微分可能であるとします．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの接線を考えます．一般に，

点 (a,b) を通る傾き m の直線を表す方程式は $y=m(x-a)+b$ [2)]

です．$y=f(x)$ のグラフの点 $\big(a,f(a)\big)$ における接線は，接点 $\big(a,f(a)\big)$ を通り，傾きは $f'(a)$ です；従ってその方程式は $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ です．

定理4.5　関数 f が実数 a において微分可能であるとき，xy 座標平面において，f のグラフの点 $\big(a,f(a)\big)$ における接線がある；その接線を表す方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式を求める．

$f(-1)=3$ なので点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^3-4x^2-5x+3)=3x^2-8x-5\ .$$

よって $f'(-1)=6$ ．従って $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式は $y=6(x+1)+3$ ，つまり $y=6x+9$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.5.1}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-5x+7}{2}$ と定めます．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $\left(-\dfrac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める．xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの，x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める．

$\psi(2)=\ln(3\cdot2+1)=\ln7$ なので，接点は $(2,\ln7)$ ．$t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln(3x+1)=\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1)$$
$$=\frac{3}{3x+1}\ .$$

よって $\psi'(2)=\dfrac{3}{3\cdot2+1}=\dfrac{3}{7}$ ．従って点 $(2,\ln7)$ における $y=\psi(x)$ の接線を表す方程式は $y=\dfrac{3}{7}(x-2)+\ln7$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.5.2}}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=(\ln x)^2$ と定めます．xy 座標平面における $y=\varphi(x)$ のグラフの，x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面における関数 $y=\cos^2x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt3}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2x=-2\sin x\cos x\ .$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=-2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt3}{2}=-\frac{\sqrt3}{2}\ .$$

従って $y=\cos^2x$ のグラフの点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は $y=-\dfrac{\sqrt3}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3}{4}$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.5.3}}$　xy 座標平面における関数 $y=\dfrac{5}{\cos x+2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい．

[2)] xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$（c は定数）となる；この直線が点 (a,b) を通るならば，$x=a$ のとき $y=b$ なので，$b=ma+c$ ，$c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) を通る傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ ．