

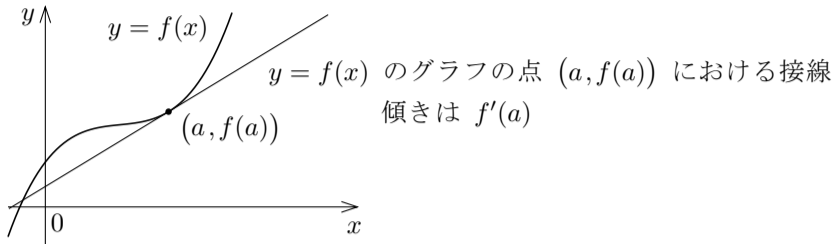
## § 4.5 関数のグラフの接線

2.6節において関数のグラフの接線について述べました。関数のグラフの接線の定義は次のようになります。

座標平面における関数のグラフ  $G$  に属す定点  $P$  に対して、 $G$  に属す動点  $T$  ( $T \neq P$ ) を限りなく  $P$  に近づけると、直線  $PT$  の傾きがある実数  $m$  に収束するならば、点  $P$  を通り傾き  $m$  の直線を点  $P$  におけるグラフ  $G$  の**接線**といい、 $P$  をその接点といいます。

直感的にいうと、曲線の接線とはその曲線に接する直線のことでした。関数  $f$  及び  $f$  の定義域の実数  $a$  について、1.6節において述べたように、 $f$  の  $a$  における微分係数は  $f$  のグラフの点  $(a, f(a))$  における接線の傾きですから、

$f$  のグラフの点  $(a, f(a))$  における接線の傾きは  $a$  における  $f$  の微分係数  $f'(a)$  です。



関数  $f$  は実数  $a$  において微分可能であるとします。 $xy$  座標平面における  $y = f(x)$  のグラフの接線を考えます。一般に、

$$\text{点 } (a, b) \text{ を通る傾き } m \text{ の直線を表す方程式は } y = m(x - a) + b \text{ } ^2)$$

です。 $y = f(x)$  のグラフの点  $(a, f(a))$  における接線は、接点  $(a, f(a))$  を通り、傾きは  $f'(a)$  です；従ってその方程式は  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  です。

**定理 4.5** 関数  $f$  が実数  $a$  において微分可能であるとき、 $xy$  座標平面において、 $f$  のグラフの点  $(a, f(a))$  における接線がある；その接線を表す方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) .$$

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$  と定める。 $xy$  座標平面における  $y = f(x)$  のグラフの点  $(-1, 3)$  における接線を表す方程式を求めよ。

$f(-1) = 3$  なので点  $(-1, 3)$  は確かに  $y = f(x)$  のグラフに属す。

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 .$$

よって  $f'(-1) = 6$  . 従って  $y = f(x)$  のグラフの点  $(-1, 3)$  における接線を表す方程式は  $y = 6(x + 1) + 3$  , つまり  $y = 6x + 9$  . 終

**問題 4.5.1** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 7}{2}$  と定めます。 $xy$  座標平面における  $y = f(x)$  のグラフの点  $(-2, -\frac{3}{2})$  における接線を表す方程式を求めなさい。

**例題** 区間  $(-\frac{1}{3}, \infty)$  を定義域とする関数  $\psi$  を  $\psi(x) = \ln(3x + 1)$  と定める。 $xy$  座標平面における  $y = \psi(x)$  のグラフの、 $x$  座標が 2 である点における接線を表す方程式を求めよ。

$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7$  なので、接点は  $(2, \ln 7)$  .  $t = 3x + 1$  とおくと

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x + 1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \frac{d}{dx}(3x + 1) \\ &= \frac{3}{3x + 1} . \end{aligned}$$

よって  $\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7}$  . 従って点  $(2, \ln 7)$  における  $y = \psi(x)$  の接線を表す方程式は  $y = \frac{3}{7}(x - 2) + \ln 7$  . 終

**問題 4.5.2** 区間  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = (\ln x)^2$  と定めます。 $xy$  座標平面における  $y = \varphi(x)$  のグラフの、 $x$  座標が  $e$  である点における接線を表す方程式を求めなさい。

**例題**  $xy$  座標平面における関数  $y = \cos^2 x$  のグラフの、 $x$  座標が  $\frac{\pi}{6}$  である点における接線を表す方程式を求めよ。

$x = \frac{\pi}{6}$  のとき  $y = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$  , 従って接点は  $(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4})$  . また、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos^2 x = -2\sin x \cos x .$$

よって、 $x = \frac{\pi}{6}$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

従って  $y = \cos^2 x$  のグラフの点  $(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4})$  における接線を表す方程式は

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4} .$$
終

**問題 4.5.3**  $xy$  座標平面における関数  $y = \frac{5}{\cos x + 2}$  のグラフの、 $x$  座標が  $\frac{\pi}{3}$  である点における接線を表す方程式を求めなさい。

<sup>2)</sup>  $xy$  座標平面において、傾き  $m$  の直線を表す方程式は  $y = mx + c$  ( $c$  は定数) となる；この直線が点  $(a, b)$  を通るならば、 $x = a$  のとき  $y = b$  なので、 $b = ma + c$  ,  $c = b - ma$  ; よって、点  $(a, b)$  を通る傾き  $m$  の直線を表す方程式は  $y = mx + b - ma$  つまり  $y = m(x - a) + b$  .