

§ 4.6 数列の極限

まず4.1節で述べた関数の極限を再述します：関数 f について、どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ となる f の定義域の実数 x があって、

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといひ、 c を $f(x)$ の極限值といひ；そしてこの極限值 c を $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と書き表す。

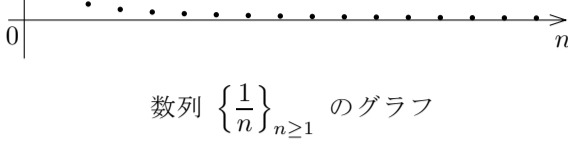
数列は関数（の一種）ですから、上述の関数の極限の定義はそのまま無限数列に適用できます。無限数列 $\{a_n\}$ について、

自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと

項 a_n の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $\{a_n\}$ は c に収束する (converge) といひ、 c を $\{a_n\}$ の極限 (値) (limit value) といひます；この極限 (値) を $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と書き表します： $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

例 $x \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{x}$ は 0 に収束します： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. 同様に、数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ は 0 に収束します： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. $x \rightarrow \infty$ のときの関数 $\frac{1}{x}$ の極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したのが数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ です。



数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geq 1}$ のグラフ

終

無限数列 $\{a_n\}$ がどんな定数にも収束しないとき、 $\{a_n\}$ は発散する (diverge) といひます。無限数列 $\{a_n\}$ が発散するとき、式 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値はありません。

無限数列 $\{a_n\}$ について、自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと a_n の値も限りなく大きくなるとき、数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

と書き表します。例を挙げます：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty .$$

無限数列 $\{a_n\}$ について、自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと、 $a_n < 0$ であってその絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき、数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するといひ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

と書き表します。

数列について、発散するが ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもないとき、振動するといひます。

例 $a_n = (-2)^n$ となる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を考えます：

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = -8, \quad a_4 = 16, \quad a_5 = -32, \quad \dots$$

この数列は発散する (収束しない) のですが、 ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもありません。つまりこの数列は振動します。

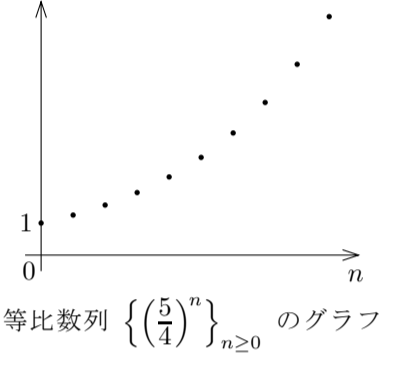
終

結局、無限数列の極限について次のように分類できます：

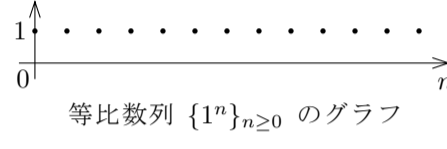
$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{限りなく唯一つの実数に近づく} = \text{極限 (値) がある} \\ \text{収束しない} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外 (振動する)} \end{cases} \end{cases}$$

等比数列の極限について考えます。

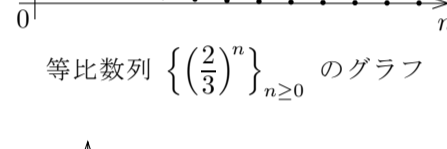
例解 6つの等比数列 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ 、 $\{1^n\}_{n \geq 0}$ 、 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ 、 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ 、 $\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$ 、 $\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ のグラフを描きます。



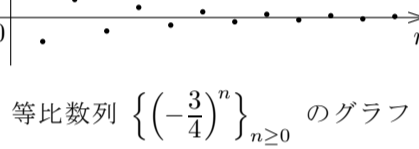
等比数列 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ のグラフ



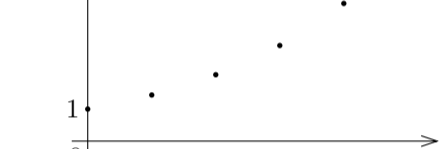
等比数列 $\{1^n\}_{n \geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ のグラフ

これらのグラフから分かるように次のようになります。

等比数列 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は ∞ に発散する： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty$.

等比数列 $\{1^n\}_{n \geq 0}$ は 1 に収束する： $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$.

等比数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

等比数列 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する： $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

等比数列 $\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$ は発散するが ∞ にも $-\infty$ にも発散しない (振動する) .

$\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は発散するが ∞ にも $-\infty$ にも発散しない (振動する) .

終

一般的に述べると次の定理が成り立ちます (証明は省略します) .

定理 4.6.1 定数 r は実数とする。無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになる：

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty ;$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 ;$$

$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 ;$$

$r \leq -1$ のとき、無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが、 ∞ にも $-\infty$ にも発散しない (振動する) .

無限数列の極限は関数の極限の一種ですから、4.2節の定理は数列の極限にも適用できます。関数 f, g について、 $x \rightarrow \infty$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば次のことが成り立ちます (定理 4.2.1) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) + g(x)\} = \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right\} + \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right\} ;$$

この等式において f を数列 $\{a_n\}$ として g を数列 $\{b_n\}$ とすると次のようになります：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) .$$

このようにして、関数の極限に関する定理 4.2.1 を数列に適用すると次のようになります。

定理 無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束するならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \pm \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \quad (\text{複号同順}) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) ;$$

$b_n \neq 0$ で、数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

この定理より、例えば次のことが導かれます：自然数を表す変数 n と無関係な定数 k について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$ なので、無限数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + k) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + k ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k a_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} k \right) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

関数の極限に関する定理 4.2.2 を数列に適用すると次のようになります。

定理 数列 $\{a_n\}$ の項は総て関数 f の定義域に属すとす。 $\{a_n\}$ が収束してかつ極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ において関数 f が連続であるならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) .$$

関数の極限に関する定理 4.2.3 を数列に適用すると次のようになります。

定理 定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とす。自然数を表す変数 n 及び数列 $\{a_n\}$ と、変数 x の関数 $f(x)$ とについて、 $a_n = f(x)$ で、 $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow a$ 、 $x \neq a$ とす。 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束するならば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow a} f(x) .$$

例題 次の数列の極限を調べる： $\left\{ \sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right\}_{n \geq 0}$.

変数 x を $x = \frac{2n+5}{3}$ とおく。 $\sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \sqrt{x}$. $n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow \infty$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$ なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n+5}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$, よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}} - 8 \right) = \infty .$$

終

問題 4.6.1 数列 $\left\{ \frac{7}{\sqrt{n+3}} + 4 \right\}_{n \geq 0}$ について、収束するか発散するかを調べ、収束するならばその極限値を求めなさい。

例題 次の数列の極限を調べる： $\left\{ 7 - \frac{5}{2^{n-3}} \right\}_{n \geq 1}$.

$7 - \frac{5}{2^{n-3}} = 7 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3}$. 変数 m を $m = n - 3$ とおく。 $\left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} = \left(\frac{1}{2} \right)^m$.

$n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$. $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m = 0$ なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^m = 0$.

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{5}{2^{n-3}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 7 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} \right\} = 7 - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-3} = 7 - 5 \cdot 0$$

$$= 7 .$$

終

問題 4.6.2 以下の数列について、収束するか発散するかを調べ、収束するならばその極限値を求めなさい。

$$(1) \left\{ 8 - 5 \left(-\frac{6}{7} \right)^{n-3} \right\}_{n \geq 1} .$$

$$(2) \left\{ \frac{8}{3^{n+2}} - 4 \right\}_{n \geq 0} .$$

例題 次の数列の極限を調べる： $\left\{ \frac{3^{n+2}}{4^n} \right\}_{n \geq 0}$.

$\frac{3^{n+2}}{4^n} = \frac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2 \left(\frac{3}{4} \right)^n$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$ なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3^2 \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\} = 3^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 3^2 \cdot 0 = 0 .$$

終

問題 4.6.3 数列 $\left\{ \frac{5^n}{4^{n+3}} \right\}_{n \geq 0}$ について、収束するか発散するかを調べ、収束するならばその極限値を求めなさい。

もう一つ定理を述べます (証明は省略します) .

定理 4.6.3 無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とは収束するとす。これらの両方の定義域に属す任意の自然数 n について $a_n \geq b_n$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.