§4.6　数列の極限

まず4.1節で述べた関数の極限を再述します：関数 f について，どんなに大きい実数 K に対しても $x>K$ となる f の定義域の実数 x があって，

　　f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

　　　　f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x\to\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限値という；そしてこの極限値 c を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す.

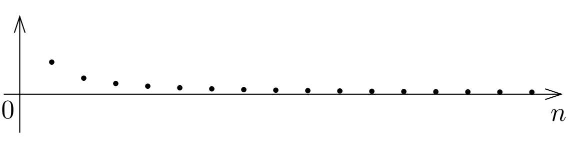
数列は関数（の一種）ですから，上述の関数の極限の定義はそのまま無限数列に適用できます．無限数列 $\{a_n\}$ について，

　　自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと

　　　　項 a_n の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$\{a_n\}$ は c に**収束する** (converge) といい，c を $\{a_n\}$ の**極限（値）** (limit value) といいます；この極限（値）を $\lim_{n\to\infty} a_n$ と書き表します：$\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

$\boxed{例}$　$x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は 0 に収束します：$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ ．同様に，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ は 0 に収束します：$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ ．$x\to\infty$ のときの関数 $\dfrac{1}{x}$ の極限 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したのが数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ の極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$ です.



数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ のグラフ

$\boxed{終}$

無限数列 $\{a_n\}$ がどんな定数にも収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散する** (diverge) といいます．無限数列 $\{a_n\}$ が発散するとき，式 $\lim_{n\to\infty} a_n$ の値はありません.

無限数列 $\{a_n\}$ について，自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと a_n の値も限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

と書き表します．例を挙げます：

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty\ , \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty\ .$$

無限数列 $\{a_n\}$ について，自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと，$a_n<0$ であってその絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書き表します.

数列について，発散するが ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもないとき，振動するといいます.

$\boxed{例}$　$a_n=(-2)^n$ となる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を考えます：

$$a_0=1\ ,\quad a_1=-2\ ,\quad a_2=4\ ,\quad a_3=-8\ ,\quad a_4=16\ ,\quad a_5=-32\ ,\quad \cdots\ .$$

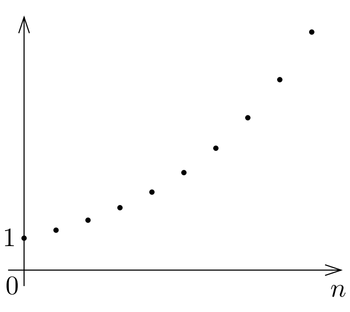
この数列は発散する（収束しない）のですが，∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもありません．つまりこの数列は振動します． $\boxed{終}$

結局，無限数列の極限について次のように分類できます：

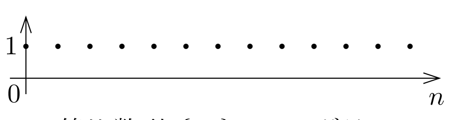
$$\begin{cases} 収束する\ =\ 限りなく唯一つの実数に近づく\ =\ 極限（値）がある \\ 収束しない\ =\ 発散する \begin{cases} \infty\ に発散する \\ -\infty\ に発散する \\ それ以外（振動する） \end{cases} \end{cases} .$$

等比数列の極限について考えます.

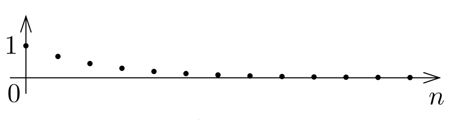
$\boxed{例解}$　6 つの等比数列 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$，$\{1^n\}_{n\geq 0}$，$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$，$\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$，$\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$，$\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフを描きます.



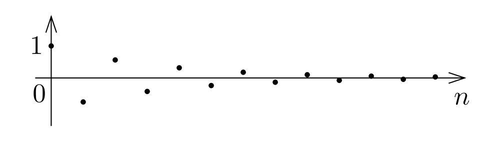
等比数列 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ



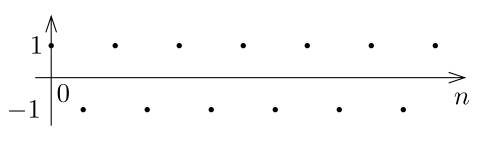
等比数列 $\{1^n\}_{n\geq 0}$ のグラフ



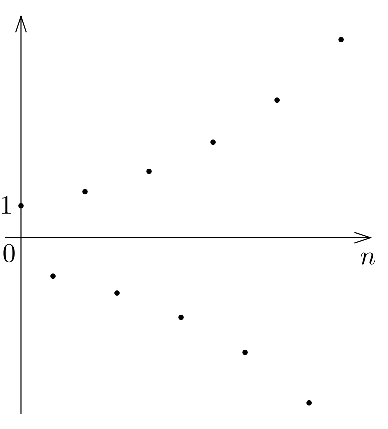
等比数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ のグラフ



等比数列 $\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフ

これらのグラフから分かるように次のようになります.

等比数列 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は ∞ に発散する：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=\infty$.

等比数列 $\{1^n\}_{n\geq 0}$ は 1 に収束する：$\lim_{n\to\infty} 1^n=1$.

等比数列 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

等比数列 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する：$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$.

等比数列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ は発散するが ∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する），

$\left\{\left(-\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は発散するが ∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）． $\boxed{終}$

一般的に述べると次の定理が成り立ちます（証明は省略します）.

> **定理** 4.6.1　定数 r は実数とする．無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになる：
>
> $$r>1\ のとき\ \lim_{n\to\infty} r^n=\infty\ ;$$
> $$r=1\ のとき\ \lim_{n\to\infty} r^n=1\ ;$$
> $$-1<r<1\ のとき\ \lim_{n\to\infty} r^n=0\ ;$$
>
> $r\leq -1$ のとき，無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが，∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）.

無限数列の極限は関数の極限の一種ですから，4.2節の定理は数列の極限にも適用できます．関数 f,g について，$x\to\infty$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば次のことが成り立ます（定理 4.2.1）：

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)+g(x)\} = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\}+\left\{\lim_{x\to\infty} g(x)\right\}\ ;$$

この等式において f を数列 $\{a_n\}$ として g を数列 $\{b_n\}$ とすると次のようになります：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)+\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)\ .$$

このようにして，関数の極限に関する定理 4.2.1 を数列に適用すると次のようになります.

定理　無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\pm\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)\quad（複号同順）\ ,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)\ ;$$

$b_n\neq 0$ で，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束して $\lim_{n\to\infty} b_n\neq 0$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\ .$$

この定理より，例えば次のことが導かれます：自然数を表わす変数 n と無関係な定数 k について，$\lim_{n\to\infty} k=k$ なので，無限数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+k) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)+\lim_{n\to\infty} k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)+k\ ,$$
$$\lim_{n\to\infty}(k\,a_n) = \left(\lim_{n\to\infty} k\right)\lim_{n\to\infty} a_n = k\lim_{n\to\infty} a_n\ .$$

関数の極限に関する定理 4.2.2 を数列に適用すると次のようになります.

定理　数列 $\{a_n\}$ の項は総て関数 f の定義域に属すとする．$\{a_n\}$ が収束してかつ極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ において関数 f が連続であるならば，

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\ .$$

関数の極限に関する定理 4.2.3 を数列に適用すると次のようになります.

定理　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．自然数を表す変数 n 及び数列 $\{a_n\}$ と，変数 x の関数 $f(x)$ とについて，$a_n=f(x)$ で，$n\to\infty$ のとき $x\to a$ ，$x\neq a$ とする．$x\to a$ のとき $f(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to a} f(x)\ .$$

$\boxed{例題}$　次の数列の極限を調べる：$\left\{\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}-8\right\}_{n\geq 0}$.

変数 x を $x=\dfrac{2n+5}{3}$ とおく．$\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}=\sqrt{x}$ ．$n\to\infty$ のとき $x\to\infty$ ．$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ なので，$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ ，よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}}-8\right)=\infty\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題 4.6.1}$　数列 $\left\{\dfrac{7}{\sqrt{n+3}}+4\right\}_{n\geq 0}$ について，収束するか発散するかを調べ，収束するならばその極限値を求めなさい.

$\boxed{例題}$　次の数列の極限を調べる：$\left\{7-\dfrac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n\geq 1}$.

$7-\dfrac{5}{2^{n-3}}=7-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ ．変数 m を $m=n-3$ とおく．$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^m$ ．$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ ．$\lim_{m\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^m=0$ なので，$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}=\lim_{m\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^m=0$ ．よって

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{5}{2^{n-3}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left\{7-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}=7-5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=7-5\cdot 0\\ &=7\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題 4.6.2}$　以下の数列について，収束するか発散するかを調べ，収束するならばその極限値を求めなさい.

(1) $\left\{8-5\left(-\dfrac{6}{7}\right)^{n-3}\right\}_{n\geq 1}$.　　(2) $\left\{\dfrac{8}{3^{n+2}}-4\right\}_{n\geq 0}$.

$\boxed{例題}$　次の数列の極限を調べる：$\left\{\dfrac{3^{n+2}}{4^n}\right\}_{n\geq 0}$.

$\dfrac{3^{n+2}}{4^n}=\dfrac{3^2 3^n}{4^n}=3^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ ．$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{3^2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=3^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=3^2\cdot 0=0\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題 4.6.3}$　数列 $\left\{\dfrac{5^n}{4^{n+3}}\right\}_{n\geq 0}$ について，収束するか発散するかを調べ，収束するならばその極限値を求めなさい.

もう一つ定理を述べます（証明は省略します）.

定理 4.6.3　無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とは収束するとする．これらの両方の定義域に属す任意の自然数 n について $a_n\geq b_n$ ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n\geq\lim_{n\to\infty} b_n$.