

## §4.7 級数

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  の項  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  を順に + でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

を(無限)級数(series)といいます; 正確には次のように書き表わします:

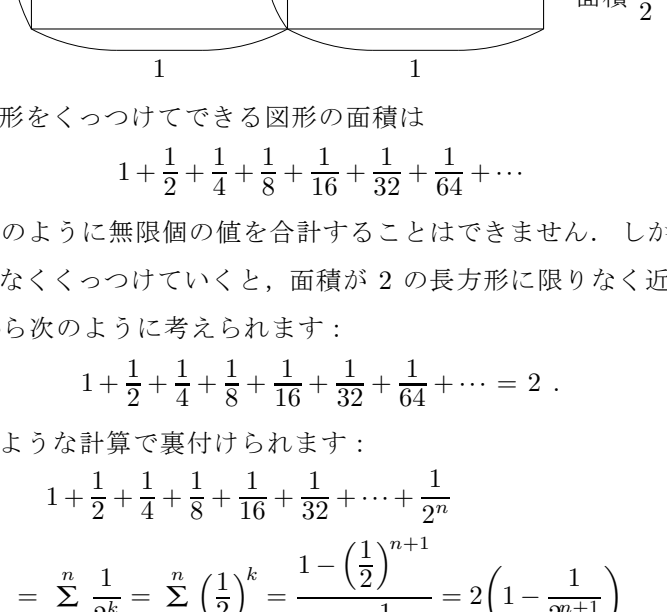
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

この(無限)級数では、無限個の項  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  の値を合計したい訳です。しかし、無限個の値を合計することは実際にはできません。

**例解** 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  つまり

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

を考えます。次のように、面積が  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$  の長方形をくっつけていきます。



このように長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

となります。このように無限個の値を合計することはできません。しかし、このような長方形を限りなくくっつけていくと、面積が2の長方形に限りなく近づいていきます。

このことから次のように考えられます:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 2.$$

このことは次のような計算で裏付けられます:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ = 2 - \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \\ = 2. \end{aligned}$$

一般的に、数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の値を次のように定義します:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n + \dots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \end{aligned}$$

この極限値を**級数の和**といいます。

**定義** 自然数  $m$  に対する値から始まる数列  $\{a_n\}_{n \geq m}$  に対して、数列  $\left\{\sum_{k=m}^n a_k\right\}_{n \geq m}$  が収束するとき、級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  は収束するといひ、数列  $\left\{\sum_{k=m}^n a_k\right\}_{n \geq m}$  の極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$  を級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  の値とする:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k.$$

この極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$  を級数の和という。また、数列  $\left\{\sum_{k=m}^n a_k\right\}_{n \geq m}$  が発散するとき、級数  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  は発散するといひ。

つまり、例えば数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対して、極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  があるときに限り級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の値があつて

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k;$$

極限値  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  が無いときは級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  の値もありません。

**例題** 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right)$  の和を調べる。

**方針** 級数の和の定義より  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right)$ 。まず総和  $\sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right)$  を計算する。

**解答**

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right) &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \dots + \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$  なので、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}\right) = \frac{5}{2}.$$

**問題 4.7.1** 級数  $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1}\right)$  の和を調べなさい。

実数の定数  $a, r$  及び自然数の定数  $m$  に対して、等比数列  $\{ar^n\}_{n \geq 0}$  からできる級数  $\sum_{n=m}^{\infty} (ar^n)$  を等比級数といひます。

**例題** 等比級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$  の和を調べる。

**方針** 級数の和の定義より  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ 。まず総和  $\sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$  を計算する。

**解答**  $S_n = \sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$  とおく。

$$\begin{aligned} S_n &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \dots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n, \\ \frac{3}{5}S_n &= 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \dots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}; \end{aligned}$$

この2つの等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5}S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1},$$

よつて  $S_n = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$  つまり  $\sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ 。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 0$  なので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right\} = 6 - 10 \cdot 0 = 6.$$

**問題 4.7.2** 等比級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$  の和を調べなさい。

**例題** 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$  の和を調べる。

**方針** 級数の和の定義より  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ 。まず総和  $\sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$  を計算する。

**解答** 等比数列の項の和の公式より

$$\sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = 3 \sum_{k=0}^n \left(\frac{5}{7}\right)^k = 3 \frac{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{21}{2} \left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}.$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = 0$  なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{21}{2} \left\{1 - \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}\right] = \frac{21}{2} (1 - 0) = \frac{21}{2}.$$

**問題 4.7.3** 等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$  の和を調べなさい。

級数について次の定理が成り立ちます。

**定理** 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  に対し、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

**証明** 数列  $\{S_n\}_{n \geq 0}$  を  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$  と定める。  $n \geq 1$  である自然数  $n$  に対して、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n, \\ S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}; \end{aligned}$$

よつて

$$S_n - S_{n-1} = a_n.$$

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するので、その和を  $S$  とおく。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S;$$

従つて更に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$  なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}\right) = S - S = 0.$$

(証明終り)

つまり、数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  について次のようになります:

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束する ならば 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は 0 に収束する。

この対偶をとると次のことが分かります:

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が 0 に収束しない ならば 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しない。

従つて、数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が発散するとき、及び、数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が収束しても  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  のとき、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は収束しない、こととなります。

**定理 4.7.1**

(1) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が発散するならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は発散する。

(2) 数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が収束して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は発散する。

この定理より、数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が収束して  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  ならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  は発散します。しかし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  であつても級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が発散することがあります(後で例を挙げます);  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  であるからといつて級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するとは限りません。

**例題** 次の級数の和を調べる:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ 。

公比  $\frac{6}{5}$  の等比数列  $\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$  は発散するので、定理 4.7 の (1) より、等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$  は発散する。

**問題 4.7.4** 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$  の和を調べなさい。

**例題** 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$  の和を調べる。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$  なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) = 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 5 - 0 = 5.$$

よつて  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) \neq 0$  なので、定理 4.7 の (2) より、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$  は発散する。

**問題 4.7.5** 次の級数の和を調べなさい:  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7\right)$ 。

**例題** 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$  の和を調べる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}.$$

まず  $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$  を計算する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} &= \sum_{k=0}^n \left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} = 5 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = 5 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 5 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$  なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{\frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)\right\} = \frac{15}{2}.$$

**問題 4.7.6** 級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$  の和を調べなさい。

等比級数について次の定理が成り立ちます。

**定理 4.7.2** 最初の項が  $a$  で公比が  $r$  である無限等比数列に対する級数は、 $|r| < 1$  のとき収束して

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \frac{a}{1-r},$$

$|r| \geq 1$  かつ  $a \neq 0$  のとき発散する。

**証明**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k).$$

$|r| < 1$  のとき: 定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$  なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r},$$

よつて

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k) = \frac{a}{1-r}.$$

$a \neq 0$  とする。  $r = 1$  のとき:

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = \sum_{k=0}^n a = a(n+1),$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき発散する; 従つて級数  $\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)$  は発散する。  $r > 1$  または  $r \leq -1$  のとき: 定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1};$$

$n \rightarrow \infty$  のとき、 $r^{n+1}$  は発散するので  $\frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$  も発散する; 従つて級数  $\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n)$  は発散する。(証明終り)

**例題** 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}$  の和を調べる。

公比  $\frac{3}{7}$  について  $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$  なのでこの級数は収束する。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\} &= \frac{6}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7}\right)^4 + \dots = \frac{\frac{6}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**問題 4.7.7** 級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$  の和を調べなさい。

級数について次の定理が成り立ちます。

**定理** 定数  $c$  及び数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  と  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  とがあるとする。級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$  も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  と  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  とが収束するならば、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (\text{複号同順}).$$

**証明** 定理 1.2.1 より  $\sum_{k=0}^n (ca_k) = c \sum_{k=0}^n a_k$  なので、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束するならば、

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ca_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(c \sum_{k=0}^n a_k\right) = c \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

定理 1.2.2 より  $\sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$  なので、級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  と  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  とが収束するならば、

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \end{aligned}$$

(証明終り)

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  について  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  であつても級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が発散する例

数列  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  について次のことが成り立ちました:

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  が収束する ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。