§ 4.7　級数

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ を順に $+$ でつないだ形の式

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots$$

を（無限）**級数** (series) といいます；正確には次のように書き表します：

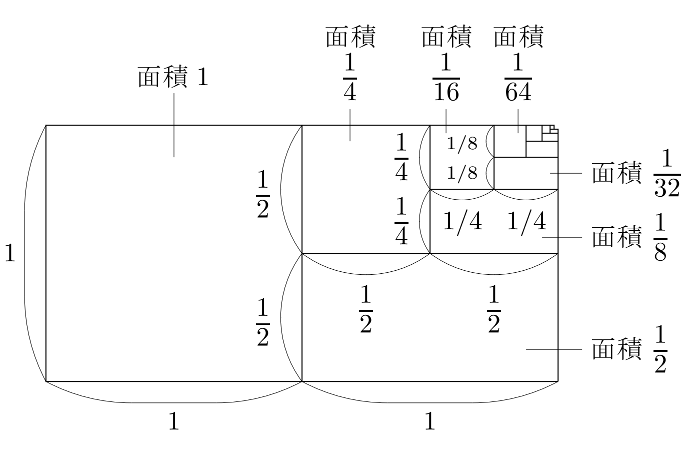
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

この（無限）級数では，無限個の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ の値を合計したい訳です．しかし，無限個の値を合計することは実際にはできません．

例解　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ つまり

$$\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

を考えます．次のように，面積が $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ の長方形をくっつけていきます．



このように長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

となります．このように無限個の値を合計することはできません．しかし，このような長方形を限りなくくっつけていくと，面積が 2 の長方形に限りなく近づいていきます．このことから次のように考えられます：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots = 2 \ .$$

このことは次のような計算で裏付けられます：

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \\
&= 2-\frac{1}{2^n} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) \\
&= 2 \ .
\end{aligned}$$

終

一般的に，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値を次のように定義します：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n+\cdots \\
&= \lim_{n\to\infty}(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k
\end{aligned}$$

この極限値を**級数の和**といいます．

定義　自然数 m に対する値から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq m}$ に対して，数列 $\left\{\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ が収束するとき，級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといい，数列 $\left\{\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k$ を級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k \ .$$

この極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} a_k$ を級数の和という．また，数列 $\left\{\sum_{k=m}^{n} a_k\right\}_{n\geq m}$ が発散するとき，級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は発散するという．

つまり，例えば数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$ があるときに限り級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値があって

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k \ ;$$

極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k$ がないときは級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値もありません．

例題　級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right)$ の和を調べる．

〔方針〕 級数の和の定義より $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$．まず総和 $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right)$ を計算する．

〔解答〕

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right) &= \frac{5}{2}-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}+\cdots+\frac{5}{n-1}-\frac{5}{n}+\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1} \\
&= \frac{5}{2}-\frac{5}{n+1} \ .
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5}{n}-\frac{5}{n+1}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{5}{k}-\frac{5}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{n+1}\right) \\
&= \frac{5}{2} \ .
\end{aligned}$$

終

問題 4.7.1　級数 $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}\right)$ の和を調べなさい．

実数の定数 a, r 及び自然数の定数 m に対して，等比数列 $\{ar^n\}_{n\geq 0}$ からできる級数 $\sum_{n=m}^{\infty}(ar^n)$ を等比級数といいます．

例題　等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べる．

〔方針〕 級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$．まず総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する．

〔解答〕 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく．

$$\begin{aligned}
S_n &= 4\cdot\frac{3}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+4\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^n \ , \\
\frac{3}{5}S_n &= \qquad 4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+4\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^n+4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \ ;
\end{aligned}$$

この 2 つの等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5}S_n = 4\cdot\frac{3}{5}-4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \ ,$$

よって $S_n = 6-10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ つまり $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = 6-10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$．$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}=0$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{6-10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right\} = 6-10\cdot 0 \\
&= 6 \ .
\end{aligned}$$

終

問題 4.7.2　等比級数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left\{6\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ の和を調べなさい．

例題　等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる．

〔方針〕 級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$．まず総和 $\sum_{k=2}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する．

〔解答〕 等比数列の項の和の公式より

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{7}\right)^k = 3\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{7}} = \frac{21}{2}\left\{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\} \ .$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}=0$ なので，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{21}{2}\left\{1-\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}\right\}\right] = \frac{21}{2}(1-0) \\
&= \frac{21}{2} \ .
\end{aligned}$$

終

問題 4.7.3　等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べなさい．

級数について次の定理が成り立ちます．

定理　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$．

証明　数列 $\{S_n\}_{n\geq 0}$ を $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ と定める．$n\geq 1$ である自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n \ , \\
S_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1} \ ;
\end{aligned}$$

よって

$$S_n - S_{n-1} = a_n \ .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するので，その和を S とおく．

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S \ ;$$

従って更に

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = S \ .$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n\to\infty} S_n\right) - \left(\lim_{n\to\infty} S_{n-1}\right) = S - S = 0 \ .$$

（証明終り）

つまり，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について次のようになります：

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する　ならば　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する．

この対偶をとると次のことが分かります：

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が 0 に収束しない　ならば　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない．

従って，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が発散するとき，及び，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束しても $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ のとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない，ことになります．

定理 4.7.1

(1)　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が発散するならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

(2)　数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

この定理より，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が収束して $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散します．しかし，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散することがあります（後で例を挙げます）；$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるからといって級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは限りません．

例題　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n$ の和を調べる．

公比 $\frac{6}{5}$ の等比数列 $\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は発散するので，定理 4.7 の (1) より，等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{5}\right)^n$ は発散する．

終

問題 4.7.4　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{7}{6}\right)^n$ の和を調べなさい．

例題　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる．

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right) = 5-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 5-0 = 5 \ .$$

よって $\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)\neq 0$ なので，定理 4.7 の (2) より，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(5-\frac{3}{n+1}\right)$ は発散する．

終

問題 4.7.5　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{n^2+3}-7\right)$ の和を調べなさい．．

例題　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ の和を調べる．

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k} \ .$$

まず $\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k}$ を計算する．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k} &= \sum_{k=0}^{n}\left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} = 5\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 5\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 5\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{15}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right) \ .
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=0$ なので，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{5}{3^k} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{15}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\right\} = \frac{15}{2} \ .$$

終

問題 4.7.6　級数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{4^n}$ の和を調べなさい．

等比級数について次の定理が成り立ちます．

定理 4.7.2　最初の項が a で公比が r である無限等比数列に対する級数は，$|r|<1$ のとき収束して

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(ar^n) = \frac{a}{1-r} \ ,$$

$|r|\geq 1$ かつ $a\neq 0$ のとき発散する．

証明

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(ar^n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(ar^k) \ .$$

$|r|<1$ のとき：定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \ ,$$

$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a\left(1-\lim_{n\to\infty} r^{n+1}\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \ ,$$

よって

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ = \sum_{n=0}^{\infty}(ar^n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(ar^k) = \frac{a}{1-r} \ .$$

$a\neq 0$ とする．$r=1$ のとき：

$$\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = \sum_{k=0}^{n} a = a(n+1) \ ,$$

これは $n\to\infty$ のとき発散する；従って級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(ar^n)$ は発散する．$r>1$ または $r\leq -1$ のとき：定理 1.5.2 より

$$\sum_{k=0}^{n}(ar^k) = a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n = \frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1} \ ;$$

$n\to\infty$ のとき，r^{n+1} は発散するので $\frac{a(r^{n+1}-1)}{r-1}$ も発散する；従って級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(ar^n)$ は発散する．

（証明終り）

例題　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\}$ の和を調べる．

公比 $\frac{3}{7}$ について $\left|\frac{3}{7}\right|<1$ なのでこの級数は収束する．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{3}{7}\right)^n\right\} &= \frac{6}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{3}{7}+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^2+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^3+\frac{6}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^4+\cdots = \frac{\frac{6}{7}}{1-\frac{3}{7}} = \frac{6}{4} \\
&= \frac{3}{2} \ .
\end{aligned}$$

終

問題 4.7.7　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$ の和を調べなさい．

級数について次の定理が成り立ちます．

定理　定数 c 及び数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と $\{b_n\}_{n\geq 0}$ とがあるとする．級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束するならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \text{（複号同順）} \ .$$

証明　定理 1.2.1 より $\sum_{k=0}^{n}(ca_k) = c\sum_{k=0}^{n} a_k$ なので，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ca_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(ca_k) = \lim_{n\to\infty}\left(c\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = c\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

定理 1.2.2 より $\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$ なので，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束するならば，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ .
\end{aligned}$$

（証明終り）

―――― 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散する例

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について次のことが成り立ちました：

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束する ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$．

しかしこの逆はいつも成り立つとは限りません．つまり，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散することがあります．

例　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように定めます：自然数 n に対して，

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n \ .$$

まずこの数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の極限がどうなるか調べます．対数の性質より

$$a_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0 \ .$$

次にこの数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ からできる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散を調べます．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\{\ln(k+1)-\ln k\} \\
&= (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+(\ln 5-\ln 4)+ \\
&\qquad \cdots+\{\ln n-\ln(n-1)\}+\{\ln(n+1)-\ln n\} \\
&= -\ln 1+\ln(n+1) = \ln(n+1) \ .
\end{aligned}$$

従って，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty \ .$$

つまり級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は ∞ に発散します．

このように，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ですが級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散します．

終