

第4章の補遺1 関数の右極限と左極限

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について、 $x > a$ の範囲だけで考えると、 $x < a$ の範囲だけで考えるときがあります。 $x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a+0$ と書き表し、このときの極限を右極限といいます。また、 $x < a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a-0$ と書き表し、このときの極限を左極限といいます。数直線上において、右極限を表す $x \rightarrow a+0$ は x の値を a の右側から a に近づけることで、左極限を表す $x \rightarrow a-0$ は x の値を a の左側から a に近づけることです。

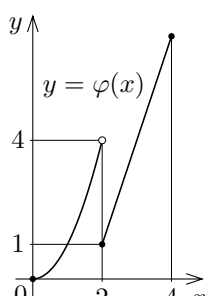


例 区間 $[0, 4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定めます：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x-5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

変数 x について、 $2 \leq x \leq 4$ のとき $\varphi(x) = 3x-5$ なので、 $x > 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと、 $\varphi(x)$ の値は $3 \cdot 2 - 5 = 1$ に限りなく近づいていきます。このようなとき、1 を $\varphi(x)$ の右極限值といい、この右極限値を $\lim_{x \rightarrow 2+0} \varphi(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \varphi(x) = 1.$$



また、 $0 \leq x < 2$ のとき $\varphi(x) = x^2$ なので、 $x < 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと、 $\varphi(x)$ の値は $2^2 = 4$ に限りなく近づいていきます。このようなとき、4 を $\varphi(x)$ の左極限値といい、この左極限値を $\lim_{x \rightarrow 2-0} \varphi(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \varphi(x) = 4. \quad \text{終}$$

一般的に述べます。関数 f 及び実数 a について、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x > a$ となる範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x > a$ となる範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow a+0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の右極限(値)といいます。 $x \rightarrow a+0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば、そのときの右極限値を

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

と書き表します。また、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x < a$ となる範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x < a$ となる範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

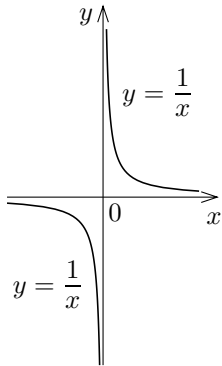
とき、 $x \rightarrow a-0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の左極限(値)といいます。 $x \rightarrow a-0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば、そのときの左極限値を

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

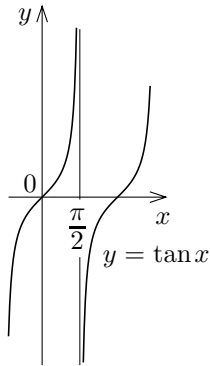
と書き表します。特に $a=0$ のとき、 $x \rightarrow 0+0$ を $x \rightarrow +0$ と、 $x \rightarrow 0-0$ を $x \rightarrow -0$ と略記します。

関数の右極限および左極限においても ∞ あるいは $-\infty$ に発散することがあります。例を挙げます：

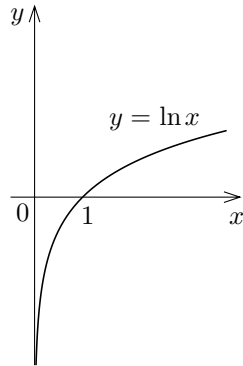
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} &= \infty, & \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \tan x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \tan x &= \infty; \\ \lim_{x \rightarrow +0} \ln x &= -\infty. \end{aligned}$$



$y = \frac{1}{x}$ のグラフ



$y = \tan x$ のグラフ



$y = \ln x$ のグラフ

次の定理が成り立ちます(証明は略します)。

定理 4. 補遺 1 関数 f 及び実数 a, c について、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c.$$

例題 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (0 < x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$g(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x)$ とを調べる。

変数 x について、 $x \rightarrow 5+0$ のとき、

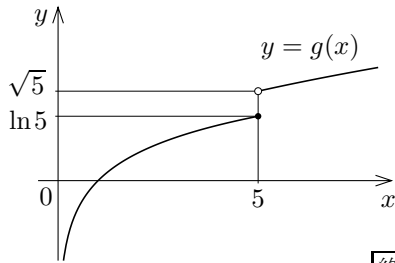
$x > 5$ なので $g(x) = \sqrt{x}$ 、よって

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \sqrt{x} = \sqrt{5}.$$

x について、 $x \rightarrow 5-0$ のとき、 $x < 5$ なの

ので $g(x) = \ln x$ 、よって

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \ln x = \ln 5.$$



終

問題 4. 補遺 1.1 区間 $(0, 10]$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & (0 < x < 8 \text{ のとき}) \\ x^{\frac{4}{3}} & (8 \leq x \leq 10 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x)$ とを調べなさい。

定理 4.2.3 を思い起こして下さい。

定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする。関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする。 $y = f(x)$ とおく。 $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$ 、 $y \neq b$ で、 $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y).$$

この定理は $x \rightarrow a+0$ のとき、 $x \rightarrow a-0$ のときなども成り立ちます。

例題 変数 x について $x \rightarrow +0$ のときの $\frac{1}{\ln x}$ の極限を調べる。

$y = \ln x$ とおく。 $x \rightarrow +0$ のとき $y = \ln x \rightarrow -\infty$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{y} = 0. \quad \text{終}$$

例題 変数 x について $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$ のときの $\left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x}$ の極限を調べる。

$y = \tan x$ とおく。 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$ のとき $y = \tan x \rightarrow \infty$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = 0. \quad \text{終}$$

問題 4. 補遺 1.2 以下の極限について、収束するならば極限値を求め、発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} (\log_2 x)^3. \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{5}{3 + \tan x}. \quad (3) \lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$