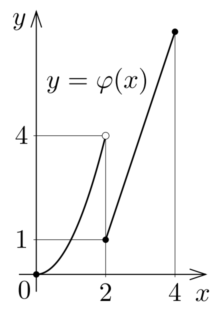
第4章の補遺1　関数の右極限と左極限

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について，$x>a$ の範囲だけで考えるときと，$x<a$ の範囲だけで考えるときがあります．$x>a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x\to a+0$ と書き表し，このときの極限を右極限といいます．また，$x<a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x\to a-0$ と書き表し，このときの極限を左極限といいます．数直線上において，右極限を表す $x\to a+0$ は x の値を a の右側から a に近づけることで，左極限を表す $x\to a-0$ は x の値を a の左側から a に近づけることです．

右極限 $x\to a+0$　　　　左極限 $x\to a-0$

$\boxed{例}$　区間 $[0,4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定めます：

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2 & (\ 0\le x<2\ のとき)\\ 3x-5 & (\ 2\le x\le 4\ のとき)\end{cases}.$$



変数 x について，$2\le x\le 4$ のとき $\varphi(x)=3x-5$ なので，$x>2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと，$\varphi(x)$ の値は $3\cdot 2-5=1$ に限りなく近づいていきます．このようなとき，1 を $\varphi(x)$ の右極限値といい，この右極限値を $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\varphi(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x\to 2+0}\varphi(x)=1\ .$$

また，$0\le x<2$ のとき $\varphi(x)=x^2$ なので，$x<2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと，$\varphi(x)$ の値は $2^2=4$ に限りなく近づいていきます．このようなとき，4 を $\varphi(x)$ の左極限値といい，この左極限値を $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\varphi(x)$ と書き表します：

$$\lim_{x\to 2-0}\varphi(x)=4\ .$$
$\boxed{終}$

一般的に述べます．関数 f 及び実数 a について，f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x>a$ となる範囲で a に限りなく近づけることができて，

　　x の値を $x>a$ となる範囲で a に限りなく近づけると

　　　　f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x\to a+0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を f の右極限（値）といいます．$x\to a+0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば，そのときの右極限値を

$$\lim_{x\to a+0}f(x)$$

と書き表します．また，f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x<a$ となる範囲で a に限りなく近づけることができて，

　　x の値を $x<a$ となる範囲で a に限りなく近づけると

　　　　f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

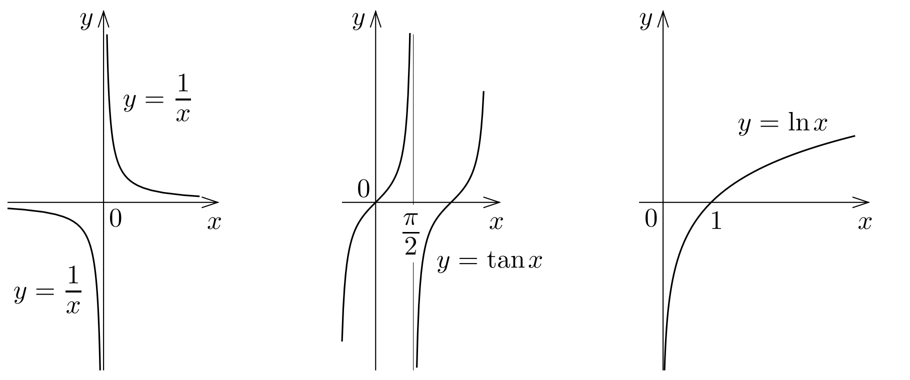
とき，$x\to a-0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を f の左極限（値）といいます．$x\to a-0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば，そのときの左極限値を

$$\lim_{x\to a-0}f(x)$$

と書き表します．特に $a=0$ のとき，$x\to 0+0$ を $x\to +0$ と，$x\to 0-0$ を $x\to -0$ と略記します．

関数の右極限および左極限においても ∞ あるいは $-\infty$ に発散することがあります．例を挙げます：

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=\infty\ ,\qquad \lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty\ ;$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty\ ,\qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\tan x=\infty\ ;$$
$$\lim_{x\to +0}\ln x=-\infty\ .$$



$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ　　　$y=\tan x$ のグラフ　　　$y=\ln x$ のグラフ

次の定理が成り立ちます（証明は略します）．

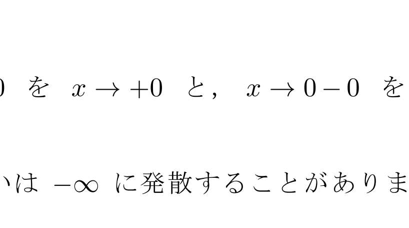
定理 4. 補遺1　関数 f 及び実数 a,c について，

$$\lim_{x\to a}f(x)=c\iff \lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=c\ .$$

$\boxed{例題}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x)=\begin{cases}\ln x & (\ 0<x\le 5\ のとき)\\ \sqrt{x} & (\ x>5\ のとき)\end{cases}.$$

$g(x)$ の右極限 $\displaystyle\lim_{x\to 5+0}g(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 5-0}g(x)$ とを調べる．



変数 x について，$x\to 5+0$ のとき，$x>5$ なので $g(x)=\sqrt{x}$ ，よって

$$\lim_{x\to 5+0}g(x)=\lim_{x\to 5+0}\sqrt{x}=\sqrt{5}\ .$$

x について，$x\to 5-0$ のとき，$x<5$ なので $g(x)=\ln x$ ，よって

$$\lim_{x\to 5-0}g(x)=\lim_{x\to 5-0}\ln x=\ln 5\ .$$
$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 4.補遺1.1}$　区間 $(0,10]$ を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(x)=\begin{cases}\log_2 x & (\ 0<x<8\ のとき)\\ x^{\frac{4}{3}} & (\ 8\le x\le 10\ のとき)\end{cases}.$$

$f(x)$ の右極限 $\displaystyle\lim_{x\to 8+0}f(x)$ と左極限 $\displaystyle\lim_{x\to 8-0}f(x)$ とを調べなさい．

定理 4.2.3 を思い起こして下さい．

> 定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする．関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．$y=f(x)$ とおく．$x\to a$ のとき $y\to b$ ，$y\ne b$ で，$y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}g\bigl(f(x)\bigr)=\lim_{y\to b}g(y)$ ．

この定理は $x\to a+0$ のとき，$x\to a-0$ のときなども成り立ちます．

$\boxed{例題}$　変数 x について $x\to +0$ のときの $\dfrac{1}{\ln x}$ の極限を調べる．

$y=\ln x$ とおく．$x\to +0$ のとき $y=\ln x\to -\infty$ なので，

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{\ln x}=\lim_{y\to -\infty}\frac{1}{y}=0\ .$$
$\boxed{終}$

$\boxed{例題}$　変数 x について $x\to \dfrac{\pi}{2}-0$ のときの $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{\tan x}$ の極限を調べる．

$y=\tan x$ とおく．$x\to \dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $y=\tan x\to\infty$ なので，

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{y}=0\ .$$
$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 4.補遺1.2}$　以下の極限について，収束するならば極限値を求め，発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べなさい．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\log_2 x)^3$ ．　(2) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\frac{5}{3+\tan x}$ ．　(3) $\displaystyle\lim_{x\to -0}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ ．