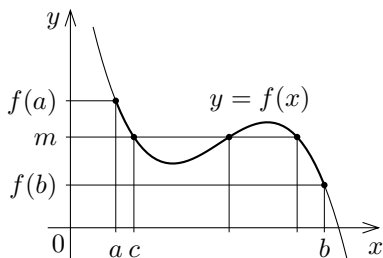
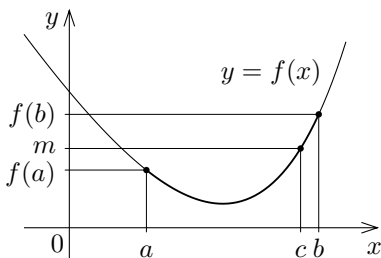


第4章の補遺2 中間値の定理

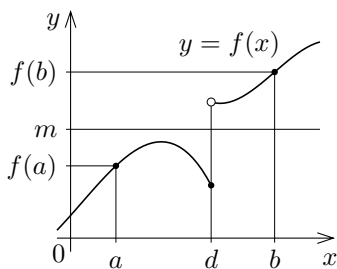
連続な関数について、中間値の定理といわれる次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．関数 f が区間 I で連続であるとは、 f が I の各実数において連続であることです．

定理 (中間値の定理) 実数 a と b について $a < b$ とする．関数 f が区間 $[a, b]$ において連続であるならば、 $f(a) < m < f(b)$ または $f(b) < m < f(a)$ となる任意の実数 m に対して、 $f(c) = m$ かつ $a < c < b$ となる実数 c がある．



中間値の定理の状況

実数 a と b について $a < b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとします．例えば右図のように、 f が $[a, b]$ において連続でないとき、つまり、 $[a, b]$ の中のある実数 d において f が連続でないとき、 $f(a) < m < f(b)$ となる実数 m に対して $f(c) = m$ かつ $a < c < b$ となる実数 c がないことがあります．



例題 次のような実数 t があることを示す： $2 < t < 3$ かつ $t^3 - 5t - 4 = 0$ ．

【解説】 中間値の定理を用いる．区間 $[2, 3]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 5x - 4$ と定める． $f(2) = -6 < 0$, $f(3) = 8 > 0$ なので、 $f(2) < 0 < f(3)$ ．関数 f は区間 $[2, 3]$ において連続なので、中間値の定理より、 $f(t) = 0$ かつ $2 < t < 3$ となる実数 t がある． $f(t) = t^3 - 5t - 4$ なので、 $2 < t < 3$ かつ $t^3 - 5t - 4 = 0$ となる実数 t がある．

終

問題 4.補遺2.1 次のような実数 k があることを示しなさい： $1 < k < 2$ かつ $k^3 - 4k + 2 = 0$ ．

例題 次のような実数 x があることを示す： $1 < x < e$ かつ $3 \ln x = x$ ．

【解説】 等式 $3 \ln x = x$ は等式 $3 \ln x - x = 0$ と同等なので、 $3 \ln x - x = 0$ となる実数 x があることを示す．中間値の定理を用いる．

区間 $[1, e]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 3 \ln x - x$ と定める．

$$f(1) = 3 \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0 ,$$

$e \doteq 2.72$ より $e < 3$ なので、

$$f(e) = 3 \ln e - e = 3 - e > 0 ,$$

よって $f(1) < 0 < f(e)$ ．関数 f は区間 $[1, e]$ において連続なので、中間値の定理より、 $f(x) = 0$ かつ $1 < x < e$ となる実数 x がある．つまり、 $1 < x < e$ かつ $3 \ln x = x$ となる実数 x がある．

終

問題 4.補遺2.2 次のような実数 x があることを示しなさい： $e < x < e^4$ かつ $4 \ln x = x$ ．