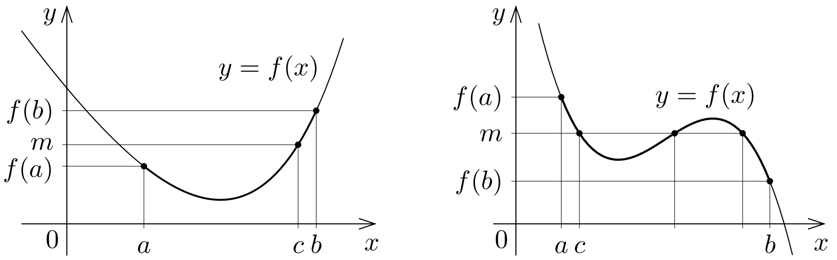
第４章の補遺２　中間値の定理

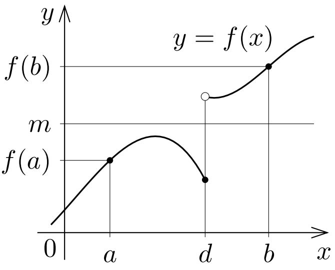
連続な関数について，中間値の定理といわれる次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．関数 f が区間 I で連続であるとは，f が I の各実数において連続であることです．

定理（中間値の定理）　実数 a と b とについて $a<b$ とする．関数 f が区間 $[a,b]$ において連続であるならば，$f(a)<m<f(b)$ または $f(b)<m<f(a)$ となる任意の実数 m に対して，$f(c)=m$ かつ $a<c<b$ となる実数 c がある．



中間値の定理の状況

実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとします．例えば右図のように，f が $[a,b]$ において連続でないとき，つまり，$[a,b]$ の中のある実数 d において f が連続でないとき，$f(a)<m<f(b)$ となる実数 m に対して $f(c)=m$ かつ $a<c<b$ となる実数 c がないことがあります．



$\boxed{\text{例題}}$　次のような実数 t があることを示す：$2<t<3$ かつ $t^3-5t-4=0$ ．

〔解説〕　中間値の定理を用いる．　区間 $[2,3]$ を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-5x-4$ と定める．　$f(2)=-6<0$ ，$f(3)=8>0$ なので，$f(2)<0<f(3)$ ．関数 f は区間 $[2,3]$ において連続なので，中間値の定理より，$f(t)=0$ かつ $2<t<3$ となる実数 t がある．$f(t)=t^3-5t-4$ なので，$2<t<3$ かつ $t^3-5t-4=0$ となる実数 t がある．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.補遺2.1}}$　次のような実数 k があることを示しなさい：$1<k<2$ かつ $k^3-4k+2=0$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　次のような実数 x があることを示す：$1<x<e$ かつ $3\ln x=x$ ．

〔解説〕 等式 $3\ln x=x$ は等式 $3\ln x-x=0$ と同等なので，$3\ln x-x=0$ となる実数 x があることを示す．中間値の定理を用いる．

区間 $[1,e]$ を定義域とする関数 f を $f(x)=3\ln x-x$ と定める．

$$f(1)=3\ln 1-1=0-1=-1<0\ ,$$

$e\fallingdotseq 2.72$ より $e<3$ なので，

$$f(e)=3\ln e-e=3-e>0\ ,$$

よって $f(1)<0<f(e)$ ．関数 f は区間 $[1,e]$ において連続なので，中間値の定理より，$f(x)=0$ かつ $1<x<e$ となる実数 x がある．つまり，$1<x<e$ かつ $3\ln x=x$ となる実数 x がある．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 4.補遺2.2}}$　次のような実数 x があることを示しなさい：$e<x<e^4$ かつ $4\ln x=x$ ．