

第4章の補遺3 2次関数のグラフの接線

xy 座標平面において、方程式 $y = px + q$ (p, q は定数) が表す直線が2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数で $a \neq 0$) のグラフの接線である条件を求めます。
 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = px + q$ とおきます。

直線 $y = g(x)$ が関数 $y = f(x)$ のグラフの接線であると仮定します。その接点の座標を (u, v) とおきます。 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフが接点 (u, v) を通るので、

$$f(u) = g(u) = v.$$

$f(u) = g(u)$ より $au^2 + bu + c = pu + q$, つまり

$$au^2 + (b-p)u + c - q = 0. \quad (1)$$

また、点 (u, v) における $y = f(x)$ のグラフの接線の傾き $f'(u)$ が直線 $y = px + q$ の傾きですから $f'(u) = p$; $f'(u) = 2au + b$ なので、 $2au + b = p$, よって $u = \frac{p-b}{2a}$. これを等式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 + (b-p)\frac{p-b}{2a} + c - q &= 0. \\ -\frac{(b-p)^2}{4a} + c - q, \\ (b-p)^2 - 4a(c-q) &= 0. \end{aligned}$$

故に、

直線 $y = g(x)$ が $y = f(x)$ のグラフに接するならば $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$.

逆に $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ と仮定します。 $u = \frac{p-b}{2a}$, $v = f(u)$ とおきます。

$$\begin{aligned} f(u) - g(u) &= a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 + b\frac{p-b}{2a} + c - \left(p\frac{p-b}{2a} + q\right) \\ &= \frac{(p-b)^2 + 2b(p-b) + 4ac - 2p(p-b) - 4aq}{4a} \\ &= \frac{-(p-b)^2 + 4a(c-q)}{4a} = -\frac{(b-p)^2 - 4a(c-q)}{4a} \\ &= 0, \end{aligned}$$

よって $f(u) = g(u) = v$. 従って直線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフは共に点 (u, v) を通ります。更に、 $f'(x) = 2ax + b$ なので

$$f'(u) = 2a\frac{p-b}{2a} + b = p.$$

つまり関数 $y = f(x)$ のグラフの点 (u, v) における接線の傾きは直線 $y = g(x)$ の傾きと一致します。故に、

$(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ ならば直線 $y = g(x)$ は $y = f(x)$ のグラフに接する。

こうして次のことが分かりました：直線 $y = px + q$ が2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフに接する条件は $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$. この条件は、言い替えると、 x に関する2次方程式 $ax^2 + (b-p)x + c - q = 0$ の判別式の値が0になることです。

定理 定数 a, b, c, p, q は実数で $a \neq 0$ とする。 xy 座標平面において、直線 $y = px + q$ が2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフに接する条件は、 x に関する2次方程式 $ax^2 + bx + c = px + q$ を整理した方程式 $ax^2 + (b-p)x + c - q = 0$ の判別式の値が0になることである。