

## 第4章の補遺3 2次関数のグラフの接線

$xy$  座標平面において、方程式  $y = px + q$  ( $p, q$  は定数) が表す直線が2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c$  は定数で  $a \neq 0$ ) のグラフの接線である条件を求めます。 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $g(x) = px + q$  とおきます。

直線  $y = g(x)$  が関数  $y = f(x)$  のグラフの接線であると仮定します。その接点の座標を  $(u, v)$  とおきます。 $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  のグラフが接点  $(u, v)$  を通るので、

$$f(u) = g(u) = v.$$

$f(u) = g(u)$  より  $au^2 + bu + c = pu + q$ , つまり

$$au^2 + (b-p)u + c - q = 0. \quad (1)$$

また、点  $(u, v)$  における  $y = f(x)$  のグラフの接線の傾き  $f'(u)$  が直線  $y = px + q$  の傾きですから  $f'(u) = p$ ;  $f'(u) = 2au + b$  なので、 $2au + b = p$ , よって  $u = \frac{p-b}{2a}$ . これを等式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 + (b-p)\frac{p-b}{2a} + c - q &= 0. \\ -\frac{(b-p)^2}{4a} + c - q, \\ (b-p)^2 - 4a(c-q) &= 0. \end{aligned}$$

故に、

直線  $y = g(x)$  が  $y = f(x)$  のグラフに接するならば  $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ .

逆に  $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$  と仮定します。 $u = \frac{p-b}{2a}$ ,  $v = f(u)$  とおきます。

$$\begin{aligned} f(u) - g(u) &= a\left(\frac{p-b}{2a}\right)^2 + b\frac{p-b}{2a} + c - \left(p\frac{p-b}{2a} + q\right) \\ &= \frac{(p-b)^2 + 2b(p-b) + 4ac - 2p(p-b) - 4aq}{4a} \\ &= \frac{-(p-b)^2 + 4a(c-q)}{4a} = -\frac{(b-p)^2 - 4a(c-q)}{4a} \\ &= 0, \end{aligned}$$

よって  $f(u) = g(u) = v$ . 従って直線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  のグラフは共に点  $(u, v)$  を通ります。更に、 $f'(x) = 2ax + b$  なので

$$f'(u) = 2a\frac{p-b}{2a} + b = p.$$

つまり関数  $y = f(x)$  のグラフの点  $(u, v)$  における接線の傾きは直線  $y = g(x)$  の傾きと一致します。故に、

$(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$  ならば直線  $y = g(x)$  は  $y = f(x)$  のグラフに接する。

こうして次のことが分かりました：直線  $y = px + q$  が2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフに接する条件は  $(b-p)^2 - 4a(c-q) = 0$ . この条件は、言い替えると、 $x$  に関する2次方程式  $ax^2 + (b-p)x + c - q = 0$  の判別式の値が0になることです。

**定理** 定数  $a, b, c, p, q$  は実数で  $a \neq 0$  とする。 $xy$  座標平面において、直線  $y = px + q$  が2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフに接する条件は、 $x$  に関する2次方程式  $ax^2 + (b-p)x + c - q = 0$  の判別式の値が0になることである。