第4章の補遺4　自然対数の底

2.9節において，特別な定数 e を次のように定義しました：

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \ .$$

そしてこの定数 e を自然対数の底といいました．しかし，通常，自然対数の底 e は別のやり方で定義されます.

次の定理が成り立ちます（証明は省略します）.

定理　数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ は収束する.

この数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ の極限値が定数 e であると定義します：

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ .$$

このように定義すると次の定理が成り立ちます（証明は略します）.

定理

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \ .$$

この定理から更に次の定理が導かれます（証明は略します）.

定理

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \ .$$

これが2.9節において $e = \lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ と定めたことの根拠です.