

## 第4章の補遺4 自然対数の底

2.9節において、特別な定数  $e$  を次のように定義しました：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

そしてこの定数  $e$  を自然対数の底といたしました。しかし、通常、自然対数の底  $e$  は別のやり方で定義されます。

次の定理が成り立ちます（証明は省略します）。

**定理** 数列  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$  は収束する。

この数列  $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$  の極限值が定数  $e$  であると定義します：

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

このように定義すると次の定理が成り立ちます（証明は略します）。

**定理**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

この定理から更に次の定理が導かれます（証明は略します）。

**定理**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

この定理が2.9節において  $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  と定めたことの根拠です。