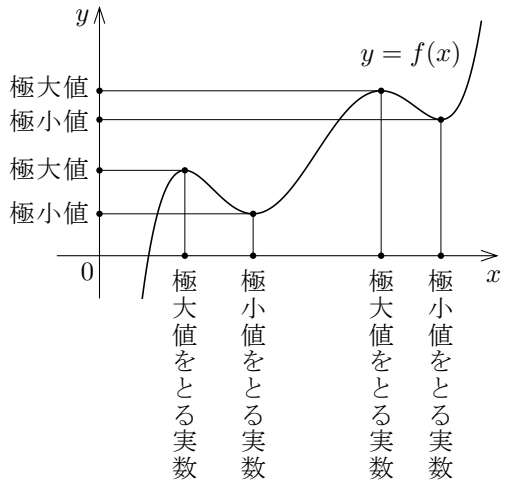
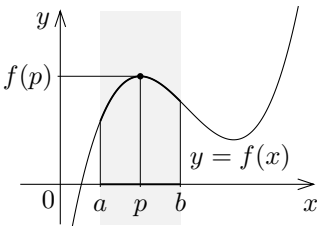


§5.1 関数の極値

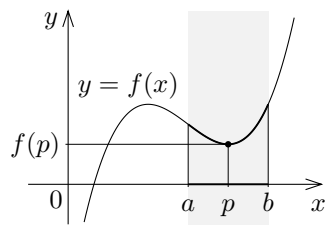
実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属するものとし、 f が p において**極大値**をとるといふのは、 p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることです。また、 f が p において**極小値**をとるといふのは、 p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最小になることです。座標平面における f のグラフでいうと右図のようになります。



正確な定義を述べます。関数 f 及び実数 p について、 f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことです： $a < p < b$ となるある実数 a, b を選ぶと、 $a < x < b$ となる各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ 。また、 f が p において極小値をとるとは次の条件が成り立つことです： $a < p < b$ となるある実数 a, b を選ぶと、 $a < x < b$ となる各実数 x について $f(p) \leq f(x)$ 。



f が p において極大値をとる。
網掛けの部分だけを見ると f は p において最大値をとる。

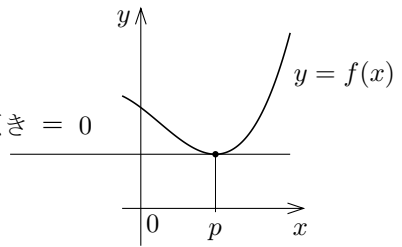
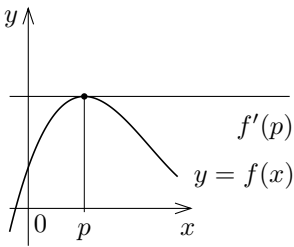


f が p において極小値をとる。
網掛けの部分だけを見ると f は p において最小値をとる。

極大値と極小値を併せて**極値**といいます。

関数の最大値・最小値はあるとしても1つだけでした。関数の極大値・極小値は、数多くあることがありますし、1つもないこともあります。

関数 f が実数 p において微分可能であるとき、微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $(p, f(p))$ における接線の傾きでした (2.6節参照)。関数のグラフにおいて、関数が極値をとるところで、接線は“水平”になる、つまり接線の傾きは0になります。



関数 f が実数 p において極値をとるときのグラフの状態

このことから次の定理が分かります。その証明は省略します。

定理 5.1 関数 f が実数 p において微分可能であるとき、 f が p において極値をとるならば $f'(p) = 0$ 。

例題 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める。この関数 f には異なる2つの極値がある。その2つの極値を求めよ。

【解説】 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ より $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ 。実数 p において f が極値をとるとすると、 $f'(p) = 0$ なので、 $3p^2 - 6p - 9 = 0$ 、 $3(p+1)(p-3) = 0$ 、よって $p = 3, -1$ 。関数 f には異なる2つの極値があるので、 f は3と-1において極値をとる。 $f(-1) = 25$ 、 $f(3) = -7$ なので、関数 f の極値は25と-7との2つである。

終

問題 5.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ と定めます。この関数 f には異なる2つの極値があります。その2つの極値を求めなさい。