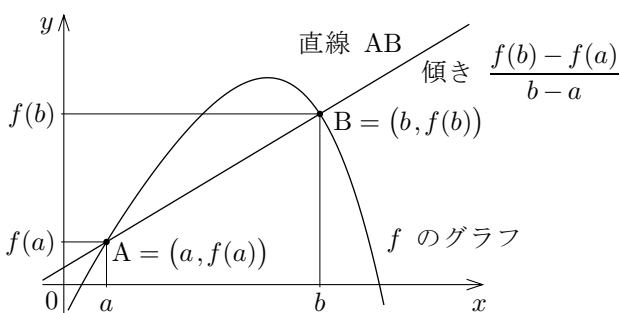
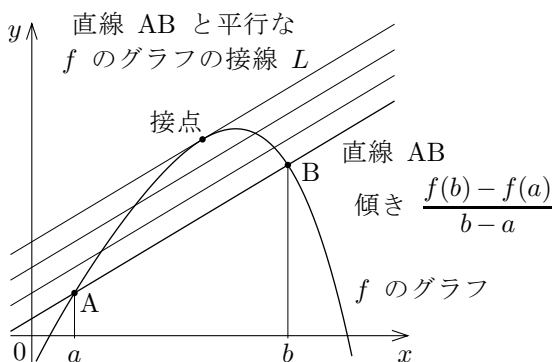


§5.2 平均値の定理

実数 a と b について $a < b$ で、関数 f は区間 $[a, b]$ において微分可能であるとします。座標平面において、関数 f のグラフに属する異なる2点 $A = (a, f(a))$ と $B = (b, f(b))$ とが属する直線 AB の傾きは $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ です。直線 AB に平行な直線を色々考えると、それらの中に f のグラフの接線 L があります。



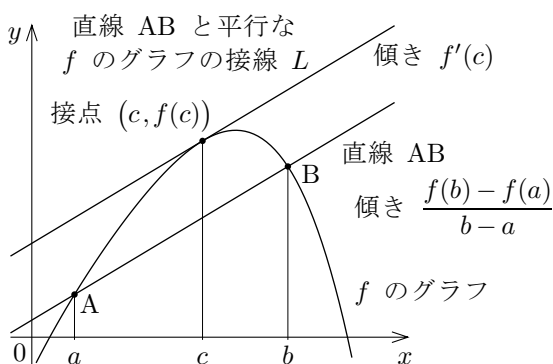
f のグラフの接線 L の接点の x 座標を c とおきます。2.6節で述べたように、 f のグラフの点 $(c, f(c))$ における接線 L の傾きは、 c における f の微分係数 $f'(c)$ です。直線 AB と接線 L とは平行なので、直線 AB の傾き $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と接線 L の傾き $f'(c)$ とは等しくなります：



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$

両辺に $b-a$ を掛けると

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$



このような実数 c を a と b との間にとることができます。このように考えて次の定理が導かれます。この定理は平均値の定理¹⁾といわれる重要な定理です。

定理 (平均値の定理) 実数 a と b について $a < b$ で、関数 f が区間 $[a, b]$ において微分可能である²⁾ならば、次のような実数 c がある：

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \quad \text{かつ} \quad a < c < b.$$

平均値の定理より次の定理が導かれます。区間 I において関数 f が微分可能であるとは、 I の各実数において f が微分可能であることでした。

定理 5.2.1 区間 I を定義域とする関数 f について、 I において $f'(x) = 0$ ならば、関数 f は定数関数である。

証明 区間 I において $f'(x) = 0$ と仮定する。 u, v は I に属する任意の実数とする。 $u < v$ とする。 f は I で微分可能なので、 f は区間 $[u, v]$ で微分可能である。従って平均値の定理より次のような実数 w がある：

$$f(v)-f(u) = f'(w)(v-u), \quad u < w < v.$$

$u < w < v$ より実数 w は区間 I に属するので、仮定より $f'(w) = 0$; よって $f(v)-f(u) = f'(w)(v-u) = 0$ なので、 $f(u) = f(v)$.

同様に、 $u > v$ のときも $f(u) = f(v)$. (証明終り)

更に次の定理が導かれます。

定理 5.2.2 微分可能な関数 f と g について、区間 I において $g'(x) = f'(x)$ ならば、ある定数 c をとると I において $g(x) = f(x) + c$.

証明 微分可能な関数 f と g について、区間 I において $g'(x) = f'(x)$ とする。区間 I を定義域とする関数 h を次のように定義する：

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

I において、 $g'(x) - f'(x) = 0$ なので、

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\{g(x) - f(x)\} = \frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}f(x) = g'(x) - f'(x) = 0.$$

従って、上述の定理 5.2.1 より関数 h は定数関数なので、ある定数 c をとると、 I において $h(x) = c$; $h(x) = g(x) - f(x)$ なので、 I において $g(x) - f(x) = c$ つまり $g(x) = f(x) + c$. (証明終り)

1) 平均値の定理といわれる定理は幾つかあります。この定理はラグランジュの平均値の定理といわれます。

2) この条件は少し緩めることができます。関数 f は区間 $[a, b]$ において連続で区間 (a, b) において微分可能であれば充分です。