§5.2　平均値の定理

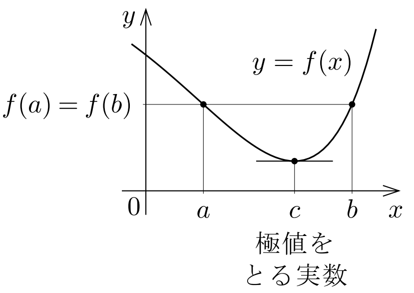
次に述べる平均値の定理は微分積分の理論において重要な定理です．平均値の定理とよばれる定理は幾つかあります．次の定理はラグランジュの平均値の定理といわれます．

定理（平均値の定理）　実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f が区間 $[a,b]$ において微分可能である[1] ならば，次のような実数 c がある：

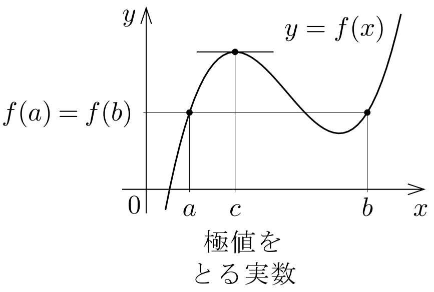
$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\ ,\qquad a<c<b\ .$$

平均値の定理を証明します．証明は省きますが次の補助定理は分かると思います．

補助定理　実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ において連続であるとする．$f(a)=f(b)$ ならば，次のような実数 c がある：$a<c<b$ で c において f は極値をとる．



実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ において微分可能とします．更に $f(a)=f(b)$ と仮定します．定理 2.7.2 より，f は $[a,b]$ において連続です．従って，補助定理より，次のような実数 c があります：$a<c<b$ で c において f は極値をとる．前節の定理 5.1 より，f が極値をとる実数 c について $f'(c)=0$ ．こうして次の定理が導かれます．



定理（ロルの定理）　実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ において微分可能とする．$f(a)=f(b)$ ならば，次のような実数 c がある：$a<c<b$ かつ $f'(c)=0$ ．

ロルの定理から平均値の定理を導きます．実数 a と b とについて $a<b$ とします．関数 f は区間 $[a,b]$ において微分可能とします．1次関数 g を次のように定めます：

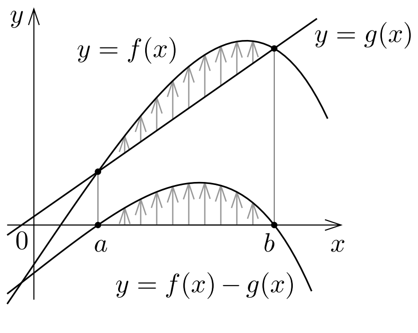
$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\ .$$

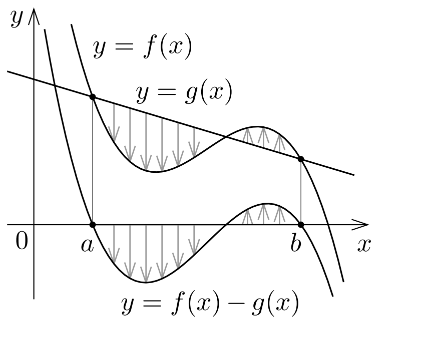
この定義より，

$$g(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)+f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 0+f(a)=f(a)\ ,$$

$$g(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a)=f(b)-f(a)+f(a)=f(b)\ .$$

よって，座標平面において1次関数 g のグラフは点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ と $\bigl(b,f(b)\bigr)$ とを通る直線です．更に，関数 h を $h(x)=f(x)-g(x)$ と定めます．





関数 g を微分すると，

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

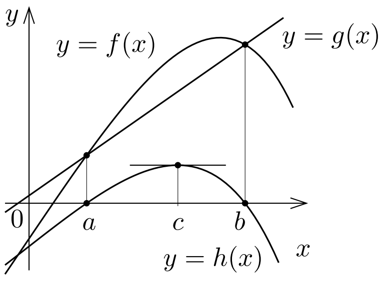
この等式を用いて関数 h を微分します．区間 $[a,b]$ において，

$$\begin{aligned}h'(x)&=\frac{d}{dx}h(x)=\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}\\&=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)\\&=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .\end{aligned}$$

$g(a)=f(a)$ ，$g(b)=f(b)$ なので，

$$h(a)=g(a)-f(a)=0\ ,$$

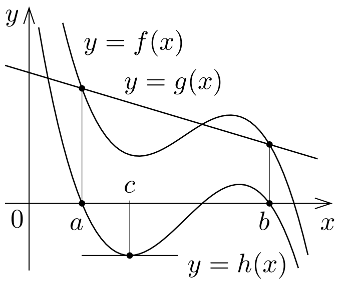
$$h(b)=g(b)-f(b)=0\ .$$



$h(a)=h(b)$ なので，ロルの定理より次のような実数 c があります：$a<c<b$ ，$h'(c)=0$ ．$h'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ なので，

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\ ,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ ,$$



故に $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ．こうして平均値の定理が証明されました．

---

[1] この条件は少し緩めることができます．関数 f は区間 $[a,b]$ において連続で区間 (a,b) において微分可能であれば充分です．