

§5.3 関数の単調増加・単調減少

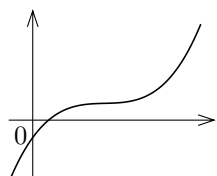
関数 f の定義域が区間 I を含むとします。 I において f が**単調増加** (monotone increasing) であるとは次のことです：

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$.

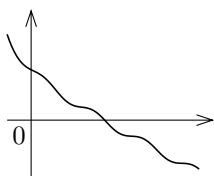
I において f が**単調減少** (monotone decreasing) であるとは次のことです：

I の任意の実数 u と v について $u < v$ ならば $f(u) > f(v)$.

感覚的にいうと、関数 f が単調増加である範囲では f のグラフは右上がりになり、 f が単調減少である範囲では f のグラフは右下がりになります。

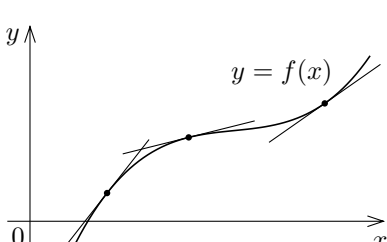


単調増加である関数のグラフの例



単調減少である関数のグラフの例

微分可能な関数 f について、 $f'(x) > 0$ のとき、 f のグラフの接線は、傾きが正なので、右上がりの直線です；このとき、右図のように、関数 f のグラフも右上がりになる、つまり f は単調増加になるように思えます。実際に次の定理が成り立ちます。



定理 区間 I で関数 f が微分可能であるとき、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ ならば、 I において f は単調増加である。

証明 区間 I で関数 f が微分可能で、 I の各実数 x について $f'(x) > 0$ とする。

区間 I の実数 u, v について $u < v$ とする。 f は、区間 I で微分可能なので、区間 $[u, v]$ で微分可能である。平均値の定理より、次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u), \quad u < w < v.$$

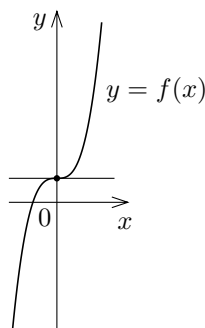
u, v は区間 I に属しかつ $u < w < v$ なので、 w は区間 I に属す³⁾；従って $f'(w) > 0$. 更に $u < v$ より $v - u > 0$ なので、

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0,$$

従って $f(u) < f(v)$.

こうして次のことが示された：区間 I の任意の各実数 u, v について、 $u < v$ ならば $f(u) < f(v)$. つまり I において f は単調増加である。 (証明終り)

例として実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 + 1$ を考えます。 $f'(x) = 3x^2$ ですから $f'(0) = 0$ ですが、右のグラフから分かるように、 f は実数全体で単調増加です。



このように、区間 I で微分可能な関数 f について、 I の中に一つや二つ $f'(p) = 0$ となる実数 p があっても、それ以外の各実数 x で $f'(x) > 0$ ならば、 f は I において単調増加です。

定理 5.3.1 区間 I で関数 f が微分可能であるとする。

- (1) I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x) > 0$ ならば、 I において f は単調増加である。
- (2) I の有限個の実数を除く各実数 x について $f'(x) < 0$ ならば、 I において f は単調減少である。

実数 p において微分可能な関数 f について、上述の例のように、 $f'(p) = 0$ であっても f が p において極値をとらないこともあります。ですから、

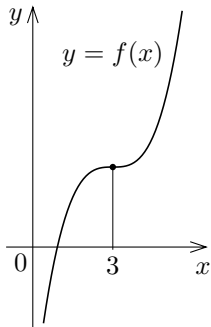
$$f \text{ が } p \text{ において極値をとるならば } f'(p) = 0$$

です (定理 5.1) が、その逆は必ずしも成り立ちません。

例題 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$ と定める。関数 f の値の増減の様子を調べる。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \right) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2. \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $(x-3)^2 = 0$ なので $x = 3$. $x \neq 3$ のとき、 $x-3 \neq 0$ なので $f'(x) = (x-3)^2 > 0$ ⁴⁾. 従って定理 5.3.1 より、関数 f は実数全体において単調増加である。 終



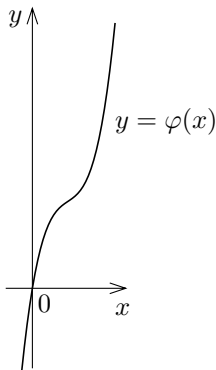
問題 5.3.1 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$ と定めま。関数 g の値の増減の様子を調べなさい。

例題 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$ と定める。関数 φ の値の増減の様子を調べる。

【方針】 導関数 $\varphi'(x)$ は x の2次式で表される。2次方程式 $\varphi'(x) = 0$ の解が実数でないときは、 $\varphi'(x)$ を表す2次式を平方完成する。

【解答】

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx} (x^3 - 4x^2 + 6x) = 3x^2 - 8x + 6 \\ &= 3 \left(x^2 - \frac{8}{3}x \right) + 6 \\ &= 3 \left\{ x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3} \right)^2 - \frac{16}{9} \right\} + 6 \\ &= 3 \left\{ x^2 - \frac{8}{3}x + \left(\frac{4}{3} \right)^2 \right\} - \frac{16}{3} + 6 \\ &= 3 \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



任意の実数 x について、 $\left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \geq 0$ なので $\varphi'(x) = 3 \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0$. 故に φ は実数全体において単調増加である。 終

問題 5.3.2 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ と定めま。関数 ψ の値の増減の様子を調べなさい。

関数 f の定義域が区間 I を含むとします。 f が I において**広義の単調増加** であるとは次のことです：

I の任意の実数 p と q について $p \leq q$ ならば $f(p) \leq f(q)$.

f が I において**広義の単調減少** であるとは次のことです：

I の任意の実数 p と q について $p \leq q$ ならば $f(p) \geq f(q)$.

区間において関数は単調増加であれば広義の単調増加です。単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩くなります。例えば定数関数は広義の単調増加ですが単調増加ではありません。同様に単調減少より広義の単調減少の方が条件が緩くなります。

証明は省きますが次の定理が成り立ちます。

定理 5.3.2 区間 I で関数 f が微分可能であるとする。

I において f が広義の単調増加である $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \geq 0$;

I において f が広義の単調減少である $\iff I$ の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

³⁾ 実数の集合 I が区間であることは次のことでした：各実数 x, y, z について、 x, y が I に属し $x < z < y$ ならば z も I に属す。

⁴⁾ 任意の実数 x について $x \neq 0$ ならば $x^2 > 0$ です。