

### §5.3 関数の単調増加・単調減少

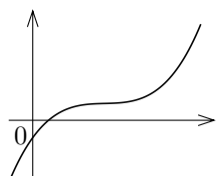
関数  $f$  の定義域が区間  $I$  を含むとします。  $I$  において  $f$  が**単調増加** (monotone increasing) であるとは次のことです：

$I$  の任意の実数  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) < f(v)$  .

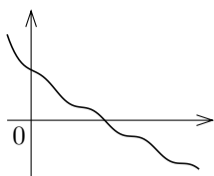
$I$  において  $f$  が**単調減少** (monotone decreasing) であるとは次のことです：

$I$  の任意の実数  $u$  と  $v$  について  $u < v$  ならば  $f(u) > f(v)$  .

感覚的にいうと、関数  $f$  が単調増加である範囲では  $f$  のグラフは右上がりになり、 $f$  が単調減少である範囲では  $f$  のグラフは右下がりになります。

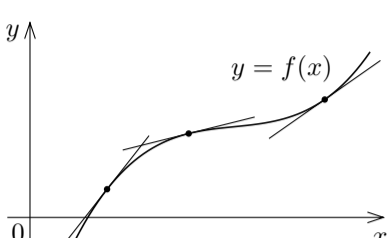


単調増加である関数のグラフの例



単調減少である関数のグラフの例

微分可能な関数  $f$  について、 $f'(x) > 0$  のとき、 $f$  のグラフの接線は、傾きが正なので、右上がりの直線です；このとき、右図のように、関数  $f$  のグラフも右上がりになる、つまり  $f$  は単調増加になるように思えます。実際に次の定理が成り立ちます。



**定理** 区間  $I$  で関数  $f$  が微分可能であるとき、 $I$  の各実数  $x$  について  $f'(x) > 0$  ならば、 $I$  において  $f$  は単調増加である。

**証明** 区間  $I$  で関数  $f$  が微分可能で、 $I$  の各実数  $x$  について  $f'(x) > 0$  とする。

区間  $I$  の実数  $u, v$  について  $u < v$  とする。  $f$  は、区間  $I$  で微分可能なので、区間  $[u, v]$  で微分可能である。平均値の定理より、次のような実数  $w$  がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u), \quad u < w < v.$$

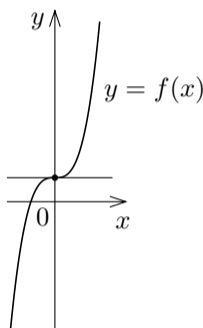
$u, v$  は区間  $I$  に属しかつ  $u < w < v$  なので、 $w$  は区間  $I$  に属す<sup>3)</sup>；従って  $f'(w) > 0$  . 更に  $u < v$  より  $v - u > 0$  なので、

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) > 0,$$

従って  $f(u) < f(v)$  .

こうして次のことが示された：区間  $I$  の任意の各実数  $u, v$  について、 $u < v$  ならば  $f(u) < f(v)$  . つまり  $I$  において  $f$  は単調増加である。 (証明終り)

例として実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = x^3 + 1$  を考えます。  $f'(x) = 3x^2$  ですから  $f'(0) = 0$  ですが、右のグラフから分かるように、 $f$  は実数全体で単調増加です。



このように、区間  $I$  で微分可能な関数  $f$  について、 $I$  の中に一つや二つ  $f'(p) = 0$  となる実数  $p$  があっても、それ以外の各実数  $x$  で  $f'(x) > 0$  ならば、 $f$  は  $I$  において単調増加です。

**定理 5.3.1** 区間  $I$  で関数  $f$  が微分可能であるとする。

- (1)  $I$  の有限個の実数を除く各実数  $x$  について  $f'(x) > 0$  ならば、 $I$  において  $f$  は単調増加である。
- (2)  $I$  の有限個の実数を除く各実数  $x$  について  $f'(x) < 0$  ならば、 $I$  において  $f$  は単調減少である。

実数  $p$  において微分可能な関数  $f$  について、上述の例のように、 $f'(p) = 0$  であっても  $f$  が  $p$  において極値をとらないこともあります。ですから、

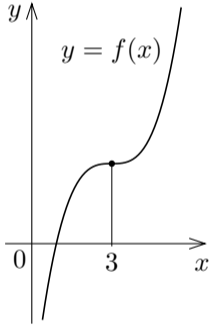
$$f \text{ が } p \text{ において極値をとるならば } f'(p) = 0$$

です (定理 5.1) が、その逆は必ずしも成り立ちません。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6$  と定める。関数  $f$  の値の増減の様子を調べる。

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 6 \right) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2.$$

$f'(x) = 0$  とすると、 $(x-3)^2 = 0$  なので  $x = 3$  .  $x \neq 3$  のとき、 $x-3 \neq 0$  なので  $f'(x) = (x-3)^2 > 0$  <sup>4)</sup>. 従って定理 5.3.1 より、関数  $f$  は実数全体において単調増加である。 終



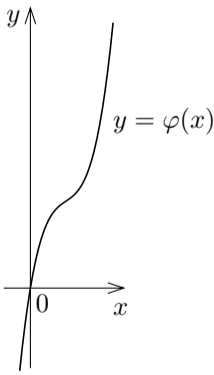
**問題 5.3.1** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 5$  と定めま。関数  $g$  の値の増減の様子を調べなさい。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = x^3 - 4x^2 + 6x$  と定める。関数  $\varphi$  の値の増減の様子を調べる。

【方針】 導関数  $\varphi'(x)$  は  $x$  の2次式で表される。2次方程式  $\varphi'(x) = 0$  の解が実数でないときは、 $\varphi'(x)$  を表す2次式を平方完成する。

【解答】

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx} (x^3 - 4x^2 + 6x) = 3x^2 - 8x + 6 \\ &= 3 \left( x^2 - \frac{8}{3}x \right) + 6 \\ &= 3 \left\{ x^2 - \frac{8}{3}x + \left( \frac{4}{3} \right)^2 - \frac{16}{9} \right\} + 6 \\ &= 3 \left\{ x^2 - \frac{8}{3}x + \left( \frac{4}{3} \right)^2 \right\} - \frac{16}{3} + 6 \\ &= 3 \left( x - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$



任意の実数  $x$  について、 $\left( x - \frac{4}{3} \right)^2 \geq 0$  なので  $\varphi'(x) = 3 \left( x - \frac{4}{3} \right)^2 + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} > 0$  . 故に  $\varphi$  は実数全体において単調増加である。 終

**問題 5.3.2** 実数全体を定義域とする関数  $\psi$  を  $\psi(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$  と定めま。関数  $\psi$  の値の増減の様子を調べなさい。

関数  $f$  の定義域が区間  $I$  を含むとします。  $f$  が  $I$  において**広義の単調増加** であるとは次のことです：

$I$  の任意の実数  $p$  と  $q$  について  $p \leq q$  ならば  $f(p) \leq f(q)$  .

$f$  が  $I$  において**広義の単調減少** であるとは次のことです：

$I$  の任意の実数  $p$  と  $q$  について  $p \leq q$  ならば  $f(p) \geq f(q)$  .

区間において関数は単調増加であれば広義の単調増加です。単調増加より広義の単調増加の方が条件が緩くなります。例えば定数関数は広義の単調増加ですが単調増加ではありません。同様に単調減少より広義の単調減少の方が条件が緩くなります。

証明は省きますが次の定理が成り立ちます。

**定理 5.3.2** 区間  $I$  で関数  $f$  が微分可能であるとする。

$I$  において  $f$  が広義の単調増加である  $\iff I$  の各実数  $x$  について  $f'(x) \geq 0$  ;

$I$  において  $f$  が広義の単調減少である  $\iff I$  の各実数  $x$  について  $f'(x) \leq 0$  .

<sup>3)</sup> 実数の集合  $I$  が区間であることは次のことでした：各実数  $x, y, z$  について、 $x, y$  が  $I$  に属し  $x < z < y$  ならば  $z$  も  $I$  に属す。

<sup>4)</sup> 任意の実数  $x$  について  $x \neq 0$  ならば  $x^2 > 0$  です。