

## §5.5 関数の最大値・最小値

関数  $f$  の値の範囲 (値域) の中で、最も大きい実数のことを  $f$  の**最大値** (maximum value) といい、最も小さい実数のことを  $f$  の**最小値** (minimum value) と言いました。

正確な定義を述べます。関数  $f$  の定義域に属す実数  $p$  について、 $f$  が  $p$  において最大値をとるとは次の条件が成り立つことです：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x).$$

また、 $f$  が  $p$  において最小値をとるとは次の条件が成り立つことです：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x).$$

関数の最大値・最小値は、各々、あるとしても唯一つだけです。最大値・最小値は無いこともあります。

**例題** 区間  $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = 2x - \ln(4x - 3)$  ( $x > \frac{3}{4}$ ) と定める。関数  $f$  の最大値・最小値を調べる。

【解答】 区間  $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$  の各実数  $x$  について、

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x - \ln(4x - 3)\} = 2 - \frac{4}{4x - 3} = \frac{8x - 10}{4x - 3}.$$

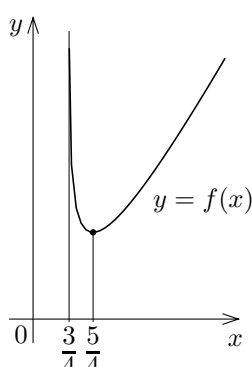
$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } \frac{8x - 10}{4x - 3} = 0 \text{ なので } 8x - 10 = 0,$$

$$\text{よって } x = \frac{5}{4}. \quad x > \frac{3}{4} \text{ より } 4x - 3 > 0. \quad \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$$

$$\text{のとき, } 4x - 5 < 0 \text{ なので } f'(x) = \frac{8x - 10}{4x - 3} < 0;$$

$$x > \frac{5}{4} \text{ のとき, } 4x - 5 > 0 \text{ なので } f'(x) = \frac{8x - 10}{4x - 3} > 0.$$

従って、関数  $f$  は、区間  $\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$  において単調減少であり、区間  $\left[\frac{5}{4}, \infty\right)$  において単調増加である。 $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{2} - \ln 2$  なので、関数  $f$  は  $\frac{5}{4}$  において最小値  $\frac{5}{2} - \ln 2$  をとる；最大値はとらない。 終



**問題 5.5.1** 実数全体を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = 6 \tan^{-1} x - \ln(x^2 + 1)$  と定めます。 $g$  の最大値・最小値を調べなさい。

**例題** 区間  $[-1, 4]$  を定義域とする関数  $\varphi$  を  $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$  ( $-1 \leq x \leq 4$ ) と定める。関数  $\varphi$  の最大値・最小値を調べる。

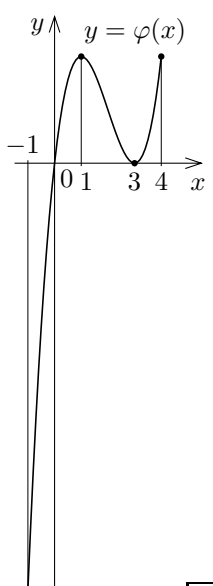
【解説】 区間  $[-1, 4]$  の各実数  $x$  について

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

実数  $p$  について  $\varphi'(p) = 0$  とすると、 $3(p - 1)(p - 3) = 0$  なので、 $p = 1, 3$ 。 $\varphi$  が  $p$  において最大値あるいは最小値をとるならば、 $\varphi'(p) = 0$  または  $p = -1$  または  $p = 4$  なので、 $p = -1, 1, 3, 4$ 。更に、 $\varphi(-1) = -16$ 、 $\varphi(1) = 4$ 、 $\varphi(3) = 0$ 、 $\varphi(4) = 4$ 。増減表は次のようになる。

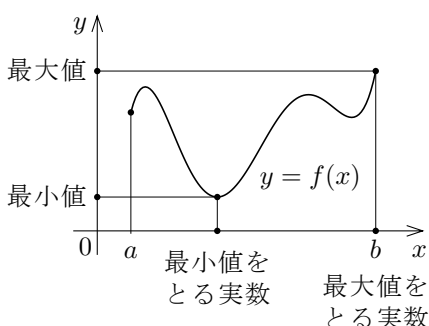
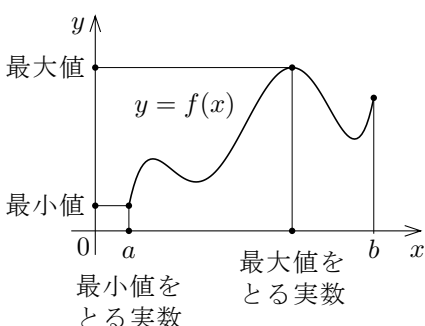
$x$	-1	...	1	...	3	...	4
$x - 1$	-	-	0	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	0	+	+
$\varphi'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$	+	+	0	-	0	+	+
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	↗	4	↘	0	↗	4

関数  $\varphi$  は、1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり、-1 において最小値 -16 をとる。 終



**問題 5.5.2** 区間  $[2, 7]$  を定義域とする関数  $\psi$  を  $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$  ( $2 \leq x \leq 7$ ) と定めます。 $\psi$  の最大値・最小値を調べなさい。

実数  $a, b$  について  $a < b$  とします。区間  $[a, b]$  を定義域とする関数  $f$  は  $[a, b]$  において微分可能であるとします。座標平面の  $f$  のグラフにおいて、最大値・最小値は例えば次の図のようになります。



次のことが成り立ちます： $f$  の定義域  $[a, b]$  の実数  $p$  について、

$f$  が  $p$  において最大値あるいは最小値をとるならば、

$p$  で  $f$  は極値をとるかまたは  $p$  は定義域の端点の実数  $a$  か  $b$  かである。

$f$  が  $p$  において極値をとるとき  $f'(p) = 0$  です (定理 5.1) から、

$f$  が  $p$  において最大値あるいは最小値をとるならば、

$$f'(p) = 0 \text{ または } p = a \text{ または } p = b.$$

従って、 $f'(p) = 0$  となる  $p$  に対する  $f(p)$  と  $f(a)$  と  $f(b)$  との中で、最大の実数が  $f$  の最大値で、最小の実数が  $f$  の最小値です。

**例題** 区間  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = \sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right) \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) と定める。関数  $g$  の最大値・最小値を調べる。

【解説】 区間  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  の各実数  $x$  について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right) \cos x\right\} = \left(x - \frac{3}{4}\right) \sin x.$$

$$g'(x) = 0 \text{ とする: } \left(x - \frac{3}{4}\right) \sin x = 0 \text{ より } x - \frac{3}{4} = 0 \text{ または } \sin x = 0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

なので、 $x = \frac{3}{4}$  または  $x = 0$ 。従って、関数  $g$  が実数  $p$  において最大値または最小値をとるならば  $p = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}$ 。

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad g(0) = \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{3}{4}\right) = \sin \frac{3}{4}, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

区間  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  において関数  $\sin x$  は単調増加なので、 $0 < \frac{3}{4} < \frac{\pi}{2}$  より  $\sin 0 < \sin \frac{3}{4} < \sin \frac{\pi}{2}$  つまり  $0 < \sin \frac{3}{4} < 1$ 。よって、

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{3}{4}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

故に、関数  $g$  は、 $\frac{\pi}{2}$  において最大値 1 をとり、 $-\frac{\pi}{2}$  において最小値 -1 をとる。 終

**問題 5.5.3** 区間  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  を定義域とする関数  $g$  を  $g(x) = \sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right) \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) と定めます。関数  $g$  の最大値・最小値を調べなさい。