§5.5　関数の最大値・最小値

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の**最大値** (maximum value) といい，最も小さい実数のことを f の**最小値** (minimum value) といいました．

正確な定義を述べます．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことです：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x)\ .$$

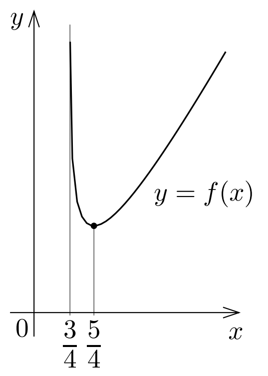
また，f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことです：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x)\ .$$

関数の最大値・最小値は，各々，あるとしても唯一つだけです．最大値・最小値は無いこともあります．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=2x-\ln(4x-3)$ $\left(x>\frac{3}{4}\right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

〔解答〕区間 $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ の各実数 x について，



$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x-\ln(4x-3)\} = 2-\frac{4}{4x-3} = \frac{8x-10}{4x-3}\ .$$

$f'(x)=0$ とすると，$\frac{8x-10}{4x-3}=0$ なので $8x-10=0$，よって $x=\frac{5}{4}$．$x>\frac{3}{4}$ より $4x-3>0$．$\frac{3}{4}<x<\frac{5}{4}$ のとき，$4x-5<0$ なので $f'(x)=\frac{8x-10}{4x-3}<0$；$x>\frac{5}{4}$ のとき，$4x-5>0$ なので $f'(x)=\frac{8x-10}{4x-3}>0$．

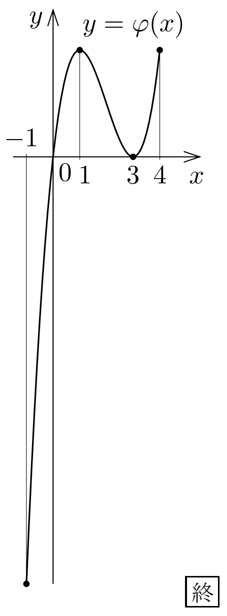
従って，関数 f は，区間 $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$ において単調減少であり，区間 $\left[\frac{5}{4},\infty\right)$ において単調増加である．$f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{2}-\ln 2$ なので，関数 f は $\frac{5}{4}$ において最小値 $\frac{5}{2}-\ln 2$ をとる；最大値はとらない．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.5.1}}$　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=6\tan^{-1}x-\ln(x^2+1)$ と定めます．g の最大値・最小値を調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ $(-1\leq x\leq 4)$ と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

〔解説〕区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x) = 3x^2-12x+9 = 3(x^2-4x+3) = 3(x-1)(x-3)\ .$$



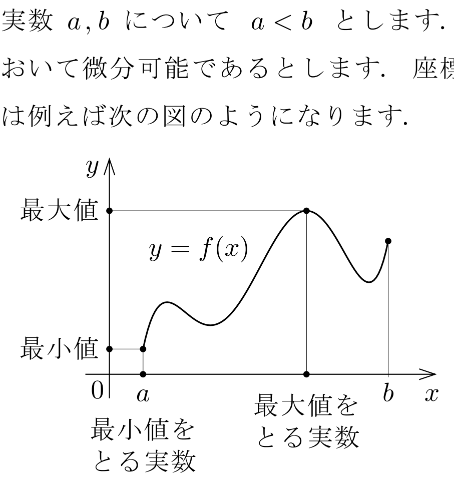
実数 p について $\varphi'(p)=0$ とすると，$3(p-1)(p-3)=0$ なので，$p=1,3$．φ が p において最大値あるいは最小値をとるならば，$\varphi'(p)=0$ または $p=-1$ または $p=4$ なので，$p=-1,1,3,4$．更に，$\varphi(-1)=-16$，$\varphi(1)=4$，$\varphi(3)=0$，$\varphi(4)=4$．増減表は次のようになる．

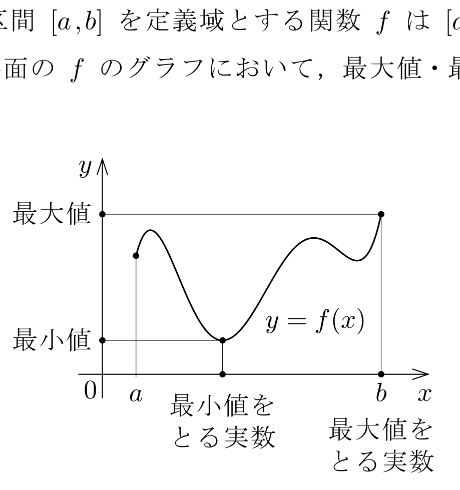
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x)=3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

関数 φ は，1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり，-1 において最小値 -16 をとる．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.5.2}}$　区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=8x^2-x^3-5x$ $(2\leq x\leq 7)$ と定めます．ψ の最大値・最小値を調べなさい．

実数 a,b について $a<b$ とします．区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f は $[a,b]$ において微分可能であるとします．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになります．





次のことが成り立ちます：f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f が p において極値をとるとき $f'(p)=0$ です（定理5.1）から，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

$$f'(p)=0 \text{ または } p=a \text{ または } p=b\ .$$

従って，$f'(p)=0$ となる p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で，最大の実数が f の最大値で，最小の実数が f の最小値です．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sin x-\left(x-\frac{3}{4}\right)\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

〔解説〕区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x-\left(x-\frac{3}{4}\right)\cos x\right\} = \left(x-\frac{3}{4}\right)\sin x\ .$$

$g'(x)=0$ とする：$\left(x-\frac{3}{4}\right)\sin x=0$ より $x-\frac{3}{4}=0$ または $\sin x=0$；$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ なので，$x=\frac{3}{4}$ または $x=0$．従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p=-\frac{\pi}{2},0,\frac{3}{4},\frac{\pi}{2}$．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\ ,\qquad g(0)=\frac{3}{4}\ ,\qquad g\left(\frac{3}{4}\right)=\sin\frac{3}{4}\ ,\qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ .$$

区間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，$0<\frac{3}{4}<\frac{\pi}{2}$ より $\sin 0<\sin\frac{3}{4}<\sin\frac{\pi}{2}$ つまり $0<\sin\frac{3}{4}<1$．よって，

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{4}{3}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right)\ ,\qquad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right)\ .$$

故に，関数 g は，$\frac{\pi}{2}$ において最大値 1 をとり，$-\frac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.5.3}}$　区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\sin x+\left(\frac{5}{4}-x\right)\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ と定めます．関数 g の最大値・最小値を調べなさい．