§5.5　関数の最大値・最小値

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の**最大値** (maximum value) といい，最も小さい実数のことを f の**最小値** (minimum value) といいました．

正確な定義を述べます．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことです：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \ .$$

また，f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことです：

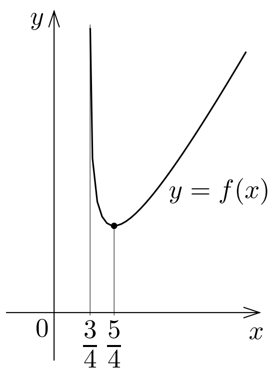
$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) \ .$$

関数の最大値・最小値は，各々，あるとしても唯一つだけです．最大値・最小値は無いこともあります．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x - \ln(4x-3)$ $\left(\ x > \dfrac{3}{4}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

〔解答〕 区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \infty\right)$ の各実数 x について，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\{2x - \ln(4x-3)\} = 2 - \frac{4}{4x-3} = \frac{8x-10}{4x-3} \ .$$



$f'(x) = 0$ とすると，$\dfrac{8x-10}{4x-3} = 0$ なので $8x - 10 = 0$，よって $x = \dfrac{5}{4}$ ．$x > \dfrac{3}{4}$ より $4x-3 > 0$ ．$\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{5}{4}$ のとき，$4x-5 < 0$ なので $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} < 0$ ；$x > \dfrac{5}{4}$ のとき，$4x-5 > 0$ なので $f'(x) = \dfrac{8x-10}{4x-3} > 0$ ．従って，関数 f は，区間 $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{4}\right]$ において単調減少であり，区間 $\left[\dfrac{5}{4}, \infty\right)$ において単調増加である．$f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{5}{2} - \ln 2$ なので，関数 f は $\dfrac{5}{4}$ において最小値 $\dfrac{5}{2} - \ln 2$ をとる；最大値はとらない．

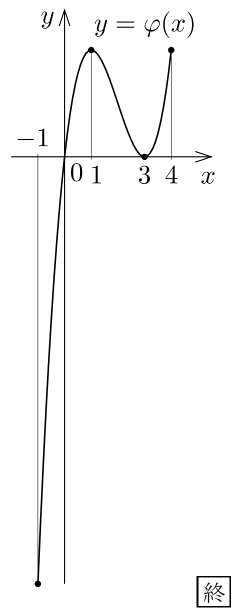
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.5.1}}$　実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 6\tan^{-1}x - \ln(x^2+1)$ と定めます．g の最大値・最小値を調べなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $[-1, 4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ （$-1 \leq x \leq 4$）と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

〔解説〕 区間 $[-1, 4]$ の各実数 x について

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3) \ .$$



実数 p について $\varphi'(p) = 0$ とすると，$3(p-1)(p-3) = 0$ なので，$p = 1, 3$ ．φ が p において最大値あるいは最小値をとるならば，$\varphi'(p) = 0$ または $p = -1$ または $p = 4$ なので，$p = -1, 1, 3, 4$ ．更に，$\varphi(-1) = -16$ ，$\varphi(1) = 4$ ，$\varphi(3) = 0$ ，$\varphi(4) = 4$ ．増減表は次のようになる．

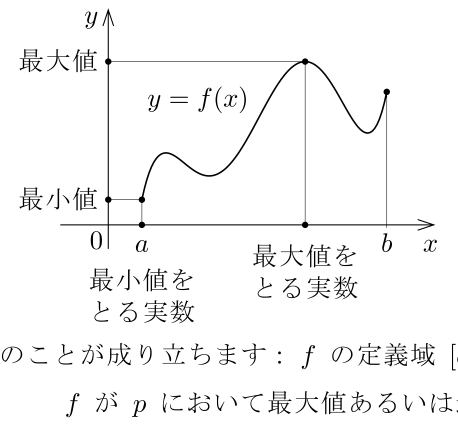
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

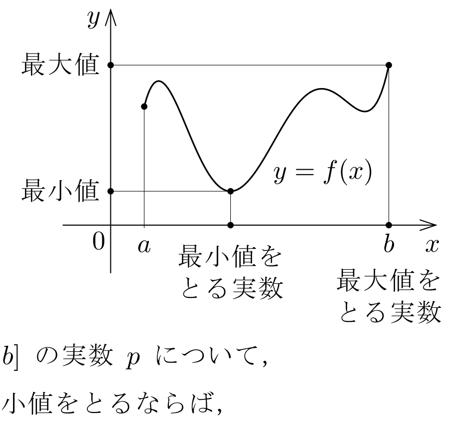
関数 φ は，1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり，-1 において最小値 -16 をとる．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.5.2}}$　区間 $[2, 7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ （$2 \leq x \leq 7$）と定めます．ψ の最大値・最小値を調べなさい．

実数 a, b について $a < b$ とします．区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとします．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになります．





次のことが成り立ちます：f の定義域 $[a, b]$ の実数 p について，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f が p において極値をとるとき $f'(p) = 0$ です（定理 5.1）から，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

$$f'(p) = 0 \ \text{ または } \ p = a \ \text{ または } \ p = b \ .$$

従って，$f'(p) = 0$ となる p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で，最大の実数が f の最大値で，最小の実数が f の最小値です．

$\boxed{\text{例題}}$　区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{3}{4}\right)\cos x$ $\left(\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\ \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

〔解説〕 区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ の各実数 x について

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x - \left(x - \frac{3}{4}\right)\cos x\right\} = \left(x - \frac{3}{4}\right)\sin x \ .$$

$g'(x) = 0$ とする：$\left(x - \dfrac{3}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \dfrac{3}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので，$x = \dfrac{3}{4}$ または $x = 0$ ．従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{3}{4}, \dfrac{\pi}{2}$ ．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad g(0) = \frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{3}{4}\right) = \sin\frac{3}{4} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，$0 < \dfrac{3}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin 0 < \sin\dfrac{3}{4} < \sin\dfrac{\pi}{2}$ つまり $0 < \sin\dfrac{3}{4} < 1$ ．よって，

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{4}{3}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) \ , \qquad g\left(-\frac{\pi}{2}\right) < g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) \ .$$

故に，関数 g は，$\dfrac{\pi}{2}$ において最大値 1 をとり，$-\dfrac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.5.3}}$　区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sin x + \left(\dfrac{5}{4} - x\right)\cos x$ $\left(\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\ \right)$ と定めます．関数 g の最大値・最小値を調べなさい．