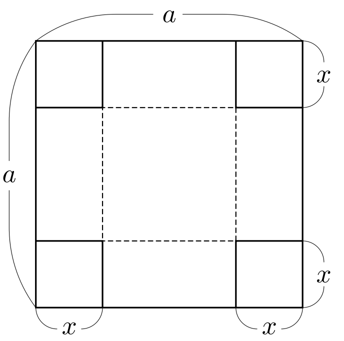
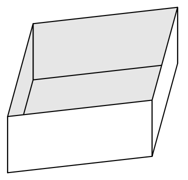
§5.6　関数の最大値最小値の応用

例えば限られた形のブリキ板から一部を切り取って折ったり曲げたり縁を接合して作った入れ物について，体積あるいは容積をできるだけ大きくしたいとします．このとき，一定の方法で作られる立体の体積（容積）の最大値を調べることになります．





例題　定数 a は正の実数とする．1辺の長さが a の正方形のブリキ板があるとする． $0<x<\dfrac{a}{2}$ である変数 x に対して，右図のように，この正方形の4隅から，1辺の長さが x の正方形を切り取って，点線を直角に折り曲げて切断した縁どうしを接合して，上面のない正方形柱の枡の形の容器を作る；この容器の容積を $V(x)$ とおく（容器の壁面の厚みは無視する）．変数 x の関数 $V(x)$ が最大値をとるときの x の値を求める．

正方形柱の底面は一辺の長さが $a-2x$ の正方形なので，正方形柱の体積 V は

$$V(x)=x(a-2x)^2=x(2x-a)^2\ .$$

微分すると

$$V'(x)=(2x-a)^2+x\cdot 2(2x-a)\cdot 2=(2x-a)(6x-a)\ .$$

$V'(x)=0$ とすると，$x=\dfrac{a}{2}$ または $x=\dfrac{a}{6}$ ， $x<\dfrac{a}{2}$ なので $x=\dfrac{a}{6}$ ． $0<x<\dfrac{a}{6}$ のとき $(2x-a)(6x-a)>0$ なので $V'(x)>0$ ； $\dfrac{a}{6}<x<\dfrac{a}{2}$ のとき $(2x-a)(6x-a)<0$ なので $V'(x)<0$ ． 関数 $V(x)$ は，区間 $\left[0,\dfrac{a}{6}\right]$ において単調増加であり，区間 $\left[\dfrac{a}{6},\dfrac{a}{2}\right]$ において単調減少である．故に $V(x)$ が最大値をとるときの x の値は $\dfrac{a}{6}$ である． 終

問題 5.6.1　定数 a は正の実数とします．母線の長さが a である直円錐の高さを x とおき，体積を $V(x)$ とおきます．変数 x の関数 $V(x)$ が最大値をとるときの x の値を求めなさい．

例題　定数 S は正の実数とします．表面積が S である直円柱の体積を最大にするには底面の半径及び高さををいくらにすればよいか調べる．表面積が S である直円柱の，底円の半径を r とおき，高さを h とおき，体積を V とおく． S は値が正の定数で，r と h と V とは値が正の実数である変数である．

(1)　h の値を表す S と r の式を求める． $S=2\pi r^2+2\pi rh$ なので，$2\pi rh=S-2\pi r^2$ ， $h=\dfrac{S}{2\pi r}-r$ ．

(2)　V の値を表す S と r の式を求める．

$$V=\pi r^2h=\pi r^2\left(\frac{S}{2\pi r}-r\right)=\frac{Sr}{2}-\pi r^3\ .$$

(3)　変数 V を変数 r の関数として微分する．

$$\frac{dV}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{Sr}{2}-\pi r^3\right)=\frac{S}{2}-3\pi r^2\ .$$

(4)　V が最大値になるときの r の値と h の値とを求める． $\dfrac{dV}{dr}=0$ とすると， $\dfrac{S}{2}-3\pi r^2=0$ なので， $r^2=\dfrac{S}{6\pi}$ ， $r>0$ なので $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ ． $0<r<\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき， $r^2<\dfrac{S}{6\pi}$ ， $3\pi r^2<\dfrac{S}{2}$ ，よって $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S}{2}-3\pi r^2>0$ ． $r>\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき， $r^2>\dfrac{S}{6\pi}$ ， $3\pi r^2>\dfrac{S}{2}$ ，よって $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S}{2}-3\pi r^2<0$ ． r の関数 V は， $0<r\le\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき単調増加であり， $r\ge\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のとき単調減少である． V が最大値になるのは $r=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ のときである．このとき

$$h=\frac{S}{2\pi r}-r=\frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{6\pi}{S}}-\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6S}{\pi}}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{6S}{\pi}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6S}{\pi}}=\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}\ .$$

(5)　表面積が S である直円柱の体積が最大になるときの底面の半径は $\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ であり高さは $\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$ である． 終

問題 5.6.2　定数 S は正の実数とします．直円柱の側面と底面だけ（上面が無い）の中空の形の容器で側面積と底面積との和が S であるものの容積を最大にするには底面の円の半径及び高さをいくらにすればよいか調べます．側面および底面の厚さは無視します．側面積と一つの底面積との和が S である直円柱の形の，高さを h とおき，体積を V とおきます． r と h と V とは値が正の実数である変数です．

(1)　h の値を表す S と r の式を求めなさい．

(2)　V の値を表す S と r の式を求めなさい．

(3)　変数 V を変数 r の関数として微分しなさい．

(4)　V が最大値になるときの r の値と h の値とを求めなさい．

(5)　側面積と底面積との和が S である直円柱の形の容器の容積が最大になるときの底面の円の半径と高さとを求めなさい．