

§ 5.7 不等式の証明

前節で議論した関数の最大値・最小値を応用して不等式を証明します。区間 I を定義域とする関数 f と g に関する述語

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値です⁷⁾：

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) - g(x) \geq 0$ ”；

更にこの述語は次の述語と同値です：

“区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である”。

こうして次のことが分かります：“区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ となる”ことを示すためには，“区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である”ことを示せばよい。

例題 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$ 。

【方針】 不等式 $\frac{9}{x} \geq 6 - x$ を導くために、不等式 $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$ を導く；そのために、関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ とおいて、 $f(x) \geq 0$ となることを示す；つまり、関数 f の最小値が 0 以上であることをいう。

【解答】 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ ($x > 0$) と定める。

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$ 、 $x = \pm 3$ 、 $x > 0$ なので $x = 3$ 。

$$0 < x < 3 \text{ のとき、} x^2 < 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0 .$$

$$x > 3 \text{ のとき、} x^2 > 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0 .$$

従って、関数 f は、区間 $(0, 3]$ において単調減少であり、区間 $[3, \infty)$ において単調増加である。よって、 f の最小値は $f(3) = 0$ 。故に、任意の正の実数 x について、 $f(x) \geq 0$ つまり $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$ なので、 $\frac{9}{x} \geq 6 - x$ 。 終

問題 5.7.1 次のことを証明しなさい：任意の正の実数 x について $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$ 。

例題 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$ 。

【方針】 不等式 $e^x \geq \frac{x+2}{e}$ を導くために、不等式 $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；そのために、関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ とおいて、 $f(x) \geq 0$ となることを示す；つまり、関数 f の最小値が 0 以上であることを示す。

【解答】 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める。

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $e^x - \frac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \frac{1}{e}$ 、よって $x = \ln \frac{1}{e} = -1$ 。

$x < -1$ のとき、 $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので⁸⁾ $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$ 。 $x > -1$ のとき、

$e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので⁸⁾ $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$ 。従って、関数 f は、区間 $(-\infty, -1]$

において単調減少であり、区間 $[-1, \infty)$ において単調増加である。よって、 f の最小値は $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{e} = 0$ 。故に、任意の実数 x について、 $f(x) \geq 0$ つまり

$$e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0 \text{ なので、} e^x \geq \frac{x+2}{e} .$$

終

問題 5.7.2 次のことを証明しなさい：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex - 2$ 。

⁷⁾ 次のことを用います：任意の実数 A, B について、 $A \geq B \iff A - B \geq 0$ 。

⁸⁾ 指数関数 e^x は単調増加なので、各実数 u, v について、 $u < v$ ならば $e^u < e^v$ 。