§5.7　不等式の証明

関数の最大値・最小値を応用して不等式を証明します．区間 I を定義域とする関数 f と g とに関する述語

“区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値です[8]：

“区間 I の任意の実数 x について $f(x)-g(x) \geq 0$ ” ；

更にこの述語は次の述語と同値です：

“区間 I を定義域とする関数 $f(x)-g(x)$ の最小値は 0 以上である”．

こうして次のことが分かります：“区間 I の任意の実数 x に付いて $f(x) \geq g(x)$ となる”ことを示すためには，“区間 I を定義域とする関数 $f(x)-g(x)$ の最小値は 0 以上である”ことを示せばよい．

$\boxed{\text{例題}}$ 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ．

〔方針〕 不等式 $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ を導くために，不等式 $\dfrac{9}{x}-(6-x) \geq 0$ を導く；そのために，関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ とおいて， $f(x) \geq 0$ となることを示す；つまり，関数 f の最小値が 0 以上であることをいう．

〔解答〕 正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{9}{x}-(6-x)$ ($x>0$) と定める．

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2}-(-1) = 1-\frac{9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2} \qquad (x>0) .$$

$f'(x)=0$ とすると， $\dfrac{x^2-9}{x^2}=0$ より $x^2-9=0$ ， $x=\pm 3$ ， $x>0$ なので $x=3$ ．

$0<x<3$ のとき， $x^2<3^2=9$ なので $f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}<0$ ．

$x>3$ のとき， $x^2>3^2=9$ なので $f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}>0$ ．

従って，関数 f は，区間 $(0,3]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．よって，f の最小値は $f(3)=0$ ．故に，任意の正の実数 x について，$f(x) \geq 0$ つまり $\dfrac{9}{x}-(6-x) \geq 0$ なので， $\dfrac{9}{x} \geq 6-x$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.7.1}}$ 次のことを証明しなさい：任意の正の実数 x について $\dfrac{4}{x^2} \geq 3-x$ ．

$\boxed{\text{例題}}$ 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ．

〔方針〕 不等式 $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ を導くために，不等式 $e^x-\dfrac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；そのために，関数 f を $f(x)=e^x-\dfrac{x+2}{e}$ とおいて， $f(x) \geq 0$ となることを示す；つまり，関数 f の最小値が 0 以上であることを示す．

〔解答〕 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=e^x-\dfrac{x+2}{e}$ と定める．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x-\frac{x+2}{e}\right) = e^x-\frac{1}{e} .$$

$f'(x)=0$ とすると， $e^x-\dfrac{1}{e}=0$ なので $e^x=\dfrac{1}{e}$ ，よって $x=\ln\dfrac{1}{e}=-1$ ．
$x<-1$ のとき， $e^x<e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ なので[8] $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{e}<0$ ． $x>-1$ のとき，$e^x>e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ なので[8] $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{e}>0$ ．従って，関数 f は，区間 $(-\infty,-1]$ において単調減少であり，区間 $[-1,\infty)$ において単調増加である．よって，f の最小値は $f(-1)=e^{-1}-\dfrac{1}{e}=0$ ．故に，任意の実数 x について， $f(x) \geq 0$ つまり $e^x-\dfrac{x+2}{e} \geq 0$ なので， $e^x \geq \dfrac{x+2}{e}$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 5.7.2}}$ 次のことを証明しなさい：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex-2$ ．

---

[8] 次のことを用います：任意の実数 A,B について， $A \geq B \iff A-B \geq 0$ ．

[8] 指数関数 e^x は単調増加なので，各実数 u,v について， $u<v$ ならば $e^u<e^v$ ．